COMPENDIO DE PROBLEMAS DE FINAL ABIERTO DE MATEMÁTICAS I

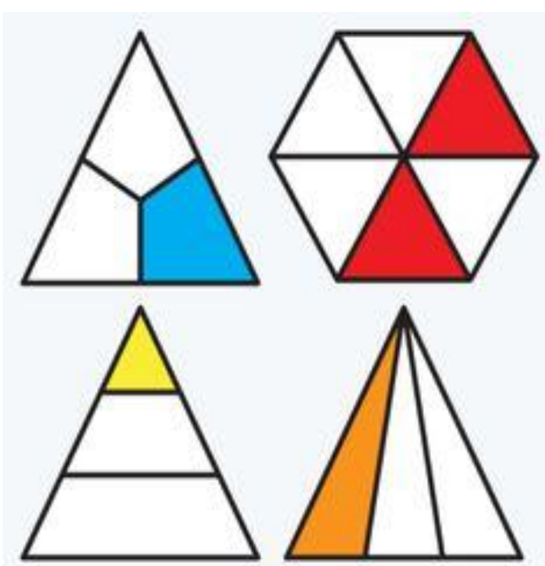
Autores:

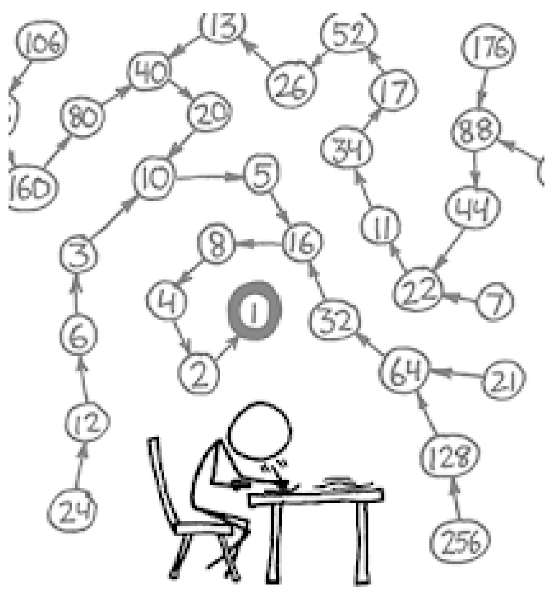
Dante Octavio Carretero Ortega

Verónica Méndez Nolasco

Francisco Mendoza Cano

Miriam Sandoval León





México, julio de 2019

Presentación

Los problemas de final abierto aquí presentados fueron diseñados, hallados o adaptados por los profesores del grupo de trabajo del Seminario: Resolución de Problemas de Final Abierto desarrollado en el plantel CCH-Naucalpan durante el ciclo escolar 2018 - 2019.

Por otro lado, uno de los propósitos que deseamos lograr los integrantes de tal equipo es el que nuestras clases no aburran a nuestros estudiantes, para ello, hemos notado que se necesita investigar constantemente cómo motivar el aprendizaje en nuestras clases. Hemos aprendido que una metodología motivacional nos la proporciona el mundo de los negocios, que plantea la **resolución de problemas complejos** aplicando el pensamiento y herramientas que emplea un diseñador (Design Thinking, pensando diseñar) ¿Por qué esta nos podría apoyar en nuestras clases? pues porque en el mercadeo o marketing se realizan estudios constantes sobre ¿por qué un consumidor adquiere tal producto aún si no lo necesita? ¿qué es lo que lleva realmente al consumidor a inclinarse por la compra de tal producto? Etc. Al respecto, aunque el mercadeo no puede crear necesidades, sí puede detectar las motivaciones y orientar su proceso de búsqueda de la satisfacción de la necesidad hacia unos productos determinados. ¿Cómo se adapta esta herramienta al mundo educativo? La analogía podría ser alumno↔consumidor, aprendizaje↔mercancía, profesor↔vendedor, y las preguntas anteriores tendrían su correspondiente en la forma ¿por qué un alumno adquiere tal aprendizaje aún si él cree que no lo va a necesitar? ¿qué es lo que lleva realmente al alumno a inclinarse por la adquisición de tal aprendizaje? Etc. Con ello en mente, se pueden emplear las ideas motivacionales del mercadeo, teniendo cuidado que nuestros estudiantes conozcan tales técnicas, tanto para mejorar su aprendizaje como para protegerse de las formas que hay para manipular a las masas, esto último, nos afecta a todos.

Por lo antes señalado, nuestro grupo de trabajo está investigando un tipo de **metodología motivacional** como la resolución de problemas complejos, diseñándolos o adaptándolos a los intereses de nuestros alumnos, indicando que para ello, no debemos menospreciar el estar atentos a una investigación y observación constantes sobre los gustos e inclinaciones de nuestros estudiantes, pues esto permitirá una mejor adaptación de nuestra labor docente a sus intereses. También, hacemos notar que no estamos investigando todos los tipos de problemas, que están estudiando otros investigadores en diferentes partes del mundo, sino que nos estamos especializando en estudiar los problemas de final abierto.

Un problema se entiende como aquella tarea en la que un individuo está obligado a relacionar la información conocida (los conocimientos previos) de una manera nueva (para él) para poder llevar a cabo la tarea. Si el resolutor reconoce de inmediato las acciones necesarias para realizar la tarea, será una tarea de rutina para él. Así, el concepto "problema" depende del tiempo y la persona.

Una tarea cerrada es aquella que está claramente definida y tiene una única solución correcta. Las tareas abiertas le dan al alumno la libertad de modificar la declaración de la pregunta y de plantear varias estrategias para la resolución del problema. El enfoque abierto es un tipo de herramienta pedagógica no rutinaria, por lo menos por dos razones:

1) Resulta difícil que algunos maestros se den cuenta que la tarea pueda tener más de una respuesta correcta; también, es posible que algunos profesores no puedan ver otras soluciones correctas.

2) La evaluación de las soluciones de tareas abiertas no está muy clara.

La investigación realizada en nuestro grupo de trabajo, nos ha permitido darnos cuenta que:

- Una buena fuente de problemas abiertos son los problemas cerrados o estándar (con una sola respuesta correcta).

- Los problemas constan de: datos (lo conocido o información proporcionada), incógnitas (lo desconocido o por descubrir) y las condiciones o restricciones que se aplican a sus soluciones.
- Un problema cerrado o estándar se puede convertir en una tarea o problema de final abierto realizándole pequeñas modificaciones a su formulación: omitir un dato o condición, reformular la redacción, pedir dar un ejemplo, cambiar el orden hipótesis-consecuencia, etc.
- Se pueden tener diversas combinaciones para producir un problema abierto a partir de uno cerrado como: eliminar la restricción, eliminar lo conocido, cambiar lo conocido / desconocido, cambiar la restricción, intercambiar lo conocido / desconocido, eliminar lo conocido y la restricción, cambiar conocido, desconocido y restricción, etc.

Los autores agradecen el apoyo facilitado por la dirección del plantel y de la institución, pues han mostrado un gran interés en la investigación docente que lleva a cabo nuestro grupo de trabajo.

Los autores
Julio de 2019

Contenido

Problemas de final abierto

Matemáticas I

UNIDAD 1. EL SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS Y SUS OPERACIONES BÁSICAS

Miriam Sandoval León

I. OPERACIONES BÁSICAS

1. Dada la siguiente expresión, acomoda paréntesis de manera que se obtengan al menos tres resultados diferentes.

$$7 + 3 * 12 - 2 \div 5$$

2. En mi calculadora no funciona la tecla del número 3. ¿Cómo puedo utilizar esta calculadora descompuesta para multiplicar 53 x 134?

3. Utilizando todos los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, cada uno una vez, acomódalos en las celdas de abajo de tal forma que el resultado de la suma sea 999.

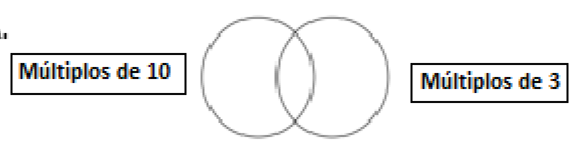
9	9	9

4. ¿Cuántas monedas necesito para juntar $45.00?

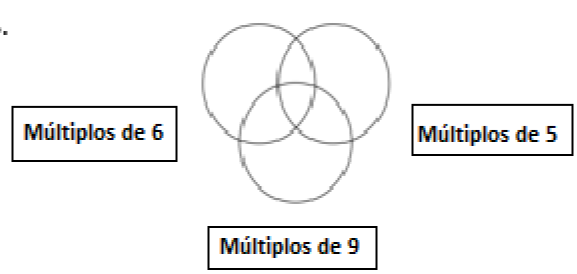
II. NÚMEROS ENTEROS

5. Escribe en cada círculo los números con las condiciones que se piden. Las regiones comunes deben cumplir con los requisitos de cada círculo. Justifica por qué colocaste los números en las regiones superpuestas.

A.



B.



III. DIVISIBILIDAD DE LOS ENTEROS

6. Encuentra diferentes parejas de números, cuyo m.c.m. sea 30. También propón algunos tríos de números que cumplan esta condición.

7. ¿De qué medida deberían ser cuatro varillas, **de diferentes medidas**, para que al cortarlas en pedazos de 16 centímetros, se utilicen las cuatro varillas completamente sin que sobre o falte material? ¿Hay alguna longitud que pueda ser la más grande? ¿Hay alguna longitud que pueda ser la más chica?

8. El genio y las joyas. Bienvenidos al Mundo de Oriente", le dijo el genio a Aladín. ¿Ves delante de ti diamantes, rubíes y esmeraldas? Dos diamantes valen tanto como tres rubíes. Cinco rubíes valen tanto como nueve esmeraldas. Haz una pila de diamantes y luego haz una pila de esmeraldas. Si puedes hacer esto para que las dos pilas tengan exactamente el mismo valor ¡puedes quedártelas todas!". ¿Cuántos diamantes debería haber en la pila de diamantes y cuántas esmeraldas deberían estar en la pila de esmeraldas? Explica tu respuesta.

IV. RACIONALES

9. Enumera los números racionales que "le siguen" a 0 y son menores que ½.

10. Saúl ganó una beca en una Universidad fuera de la ciudad y está organizando sus gastos mensuales los cuáles reparte en: renta, alimentos, ropa, diversiones y otra parte para gastos escolares. Sabe que tiene que disponer de, al menos 2/5 partes de su presupuesto para la renta de su vivienda y que la parte asignada para ropa debe ser menor a la parte asignada para alimentos. Propón una forma de distribuir sus ingresos (en fracciones), en la que se utilice el total de su presupuesto y tome en cuenta todos sus gastos.

11. En una tienda deportiva, por fin de temporada, hay descuentos de toda la mercancía, hasta por un 50%.

Si a precio de remate una bicicleta cuesta $3,200 ¿Qué porcentaje de descuento crees que tenga? ¿Cuál era su precio antes de la barata?

12. En cierta población de bacterias, inicialmente hay 3 bacterias. Si se sabe que crecen de forma exponencial cada hora como se muestra en la siguiente tabla, calcula el número de bacterias que se esperan después de 8 horas.

TABLA DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL EN LAS TRES PRIMERAS HORAS

Tiempo transcurrido en horas	Número de bacterias*
1	$3^1=3$
2	$3^2=9$
3	$3^3=27$

*La base 3 tendrá un exponente que depende de las horas que vayan pasando

13. Emilia comprará un teléfono celular y lo pagará a doce meses bajo las siguientes condiciones para no generar cargos extra:

- ❖ Deberá pagar cada mes cierta cantidad sin dejar de hacer algún pago.
- ❖ Al final del año, tendrá que haber pagado todo el teléfono sin que falte ni sobre alguna parte.
- ❖ Tendrá que definir su plan de pagos para que le entreguen el teléfono.
- ❖ Ella sabe que el primer mes puede pagar 1/5 partes del total y el segundo mes 1/3. Propón un plan de pago para los siguientes 10 meses.

14. 10 es el resultado de dividir dos números ¿Qué números se están dividiendo?

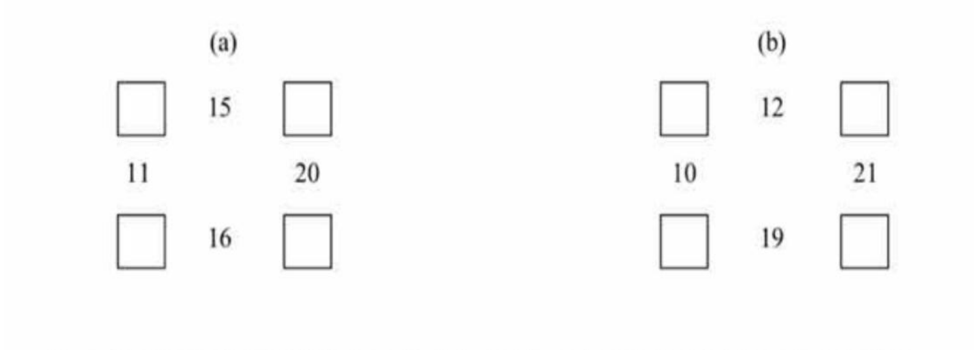
V. PATRONES DE NÚMEROS

Observa el siguiente patrón de números. Nota que:

$2+8=10 \qquad 5+3=8 \qquad 2+5=7 \qquad 8+3=11.$

$\boxed{2}$	10	$\boxed{8}$
7		11
$\boxed{5}$	8	$\boxed{3}$

15. Completa los siguientes diagramas utilizando el mismo patrón.



VI. SECUENCIAS

16. Considera la siguiente secuencia de números: 1, 2, 4, 6, 8, 12. Encuentra el número que no corresponde a la secuencia. Justifica tu respuesta.

Problemas de final abierto sobre ecuaciones lineales

Por Dante Octavio Carretero Ortega

Problema de álgebra (tomado de Baldor, A.)

Problema 1. Dentro de 4 años la edad de A será el triplo de la de B, y hace 2 años era el quíntuplo. Hallar las edades actuales.

Resolviendo la ecuación correspondiente

a + 4 = 3(b +4) y a – 2 = 5(b – 2); a = 3b + 8 y a = 5b – 8; 3b + 8 = 5b – 8; 16 = 2b; b = 8; a = 3(8) + 8; a = 32.

el resultado es que A tiene actualmente 32 años, y B tiene 8; hace 2 años tenían 30 y 6 respectivamente, y dentro de cuatro tendrán 36 y 12.

El problema anterior lo podemos transformar en uno de final abierto, como sigue:

Problema 1_1. Dentro de algunos años, la edad de A será el triplo de la de B, y hace algunos años era el quíntuplo. Hallar las edades actuales.

Solución

De este problema se puede derivar:

1) Dentro de 1 año, la edad de A será el triplo de la de B, y hace 1 año era el quíntuplo. Hallar las edades actuales. Respuesta: 11 años y 3 años.

Otra derivación sería:

2) Dentro de 2 años, la edad de A será el triplo de la de B, y hace 1 año era el quíntuplo. Hallar las edades actuales. Respuesta: 16 años y 4 años.

Otro posible diseño, es:

Problema 1_2. Dentro de 1 año, la edad de A será el triplo de la de B, y hace 2 años era el quíntuplo. Hallar las edades actuales. Respuesta: 17 años y 5 años.

También podrían cambiarse los múltiplos:

Problema 1_3. Hace algunos años la edad de A era el triplo y dentro de algunos será el doble, hallar las edades actuales.

Una solución posible sería A tiene 40 y B tiene 16: hace 4 años tenían 36 y 12, y dentro de 8 años tendrán 48 y 24, etc.

Problemas de final abierto sobre variaciones proporcionales

Problema 2. Si 6 gatos atrapan a 6 ratones en 6 horas, a cuantos ratones atraparán 30 gatos en 30 horas.

Respuesta: 150 ratones.

El problema anterior puede transformarse en de final abierto como sigue:

Problema 2_1. ¿Cuántos gatos atraparán a 150 ratones y en cuánto tiempo?

Solución

Algunas posibles respuestas son:

150 gatos atraparan 150 ratones en 6 horas

75gatos atraparan 150 ratones en 12 horas

15 gatos atraparan 150 ratones en 60 horas

30 gatos atraparan 150 ratones en 30 horas

25 gatos atraparan 150 ratones en 36 horas, etc.

Otro problema sobre variaciones proporcionales, es el siguiente:

Problema 3. Se fabricaron 840 tornillos de 4 pulgadas con 30 kilogramos de acero. ¿Cuántos tornillos de 3 pulgadas se fabricarán con esos mismos kilogramos de acero?

Respuesta: 1120.

El problema se podría transformar en de final abierto, de la siguiente manera:

Problema 3_1. Si se fabricaron 840 tornillos de 4 pulgadas con 30 kilogramos de acero ¿Cuántos tornillos de cuantas pulgadas, se podrán fabricar con esos mismos kilogramos de acero?

Algunas posibles respuestas, serían:

3360 tornillos de 1 pulgada

1680 tornillos de 2 pulgadas

2240 tornillos de 1.5 pulgadas, etc.

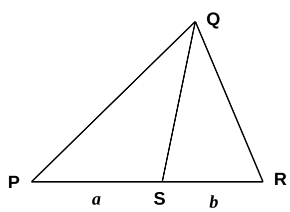
Problemas de final abierto de ecuaciones lineales con una incógnita

Por Francisco Mendoza Cano

1. Trabajando sola a su ritmo constante, la máquina A produce k litros de un producto químico en 10 minutos. Trabajando sola a su ritmo constante, la máquina B produce k litros de producto químico en 15 minutos. ¿Cuántos minutos tardan las máquinas A y B, trabajando simultáneamente en sus respectivas tasas constantes, para producir k litros de producto químico?

_______ minutos.

2. La pregunta siguiente se basa en el ΔPQR donde se supone que PQ = PR:



Cantidad *a*: La longitud de PS

Cantidad *b*: La longitud de SR

a) La cantidad *a* es mayor que la cantidad *b.*

b) La cantidad *b* es mayor que la cantidad *a*.

c) Las dos cantidades *a* y *b* son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

3. Un comerciante obtuvo una ganancia de $50 por la venta de un suéter que le costó c pesos. ¿Cuál es el beneficio expresado como porcentaje del costo al comerciante?

Da tu respuesta al porcentaje entero más cercano: _______%.

4. Pregunta de comparación cuantitativa:

Cantidad A: x + 1

Cantidad B: 2x – 1

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

5. Pregunta de comparación cuantitativa estimada:

Cantidad A: *a*% de 360, donde *a* es un número entre 0 y 100.

Cantidad B: 150

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

6. Un automóvil consiguió 14.25 km por litro con gasolina que costaba a $19.25 por litro. ¿Aproximadamente cuál sería el costo en pesos de la gasolina utilizada para conducir el auto una cierta cantidad de millas?

7. Pregunta de comparación cuantitativa:

Pedro es más joven que Ana.

Cantidad A: Dos veces la edad de Pedro

Cantidad B: la edad de Ana

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

8. Pregunta de comparación cuantitativa:

Si $y = 3x - 1$, luego

Cantidad A: x

Cantidad B: y

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

9. Pregunta de comparación cuantitativa:

Cantidad A: el menor número primo mayor que 24

Cantidad B: el mayor número primo menor que 28

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

10. ¿Cuál de los siguientes enteros son múltiplos de 2 y 3?

Indique todos estos enteros. Seleccione una o más opciones de respuesta.

A. 8

B. 9

C. 12

D. 18

E. 21

F. 36

¿Habrá más respuestas de las señaladas aquí?

11. Determine todos los pares de números x e y, de modo que $x + y$ y $x - y$ sean iguales.

12. A Juan se le preguntó cuántas estampas había coleccionado. Él contestó: "Si a las que tengo, le agregara la mitad de ellas y a todas estas les agregara $1\frac{1}{2}$ de las que tengo, tendría _______ (anota una cantidad que permita que la respuesta sea entera)" ¿Cuántas estampas tiene Juan?

13. Pregunta de comparación cuantitativa:

Se supone que $w > 2$.

Cantidad A: $5w – 3$

Cantidad B: $3w + 2$

a) La cantidad A es mayor que la cantidad B.

b) La cantidad B es mayor que la cantidad A.

c) Las dos cantidades son iguales.

d) La relación no puede ser determinada a partir de la información dada.

14. Stephen agregó los cuadrados de 6 enteros consecutivos y obtuvo 1111. ¿Qué enteros cuadró y luego sumó?

Más problemas de final abierto sobre ecuaciones lineales con una incógnita

Por Francisco Mendoza Cano

Si bien los problemas siguientes plantean ecuaciones lineales, a veces pueden plantearse con una o varias incógnitas, lo que se intenta es que los alumnos aprendan a manipular ecuaciones aplicando sus propiedades y no tanto el enseñar a resolver sistemas.

Problema 1. Números en el triángulo. Se dibuja un triángulo con las esquinas libres y algunos números se fijan en los lados, figura 1.

1) ¿Qué números deben colocarse en los círculos en blanco del triángulo para que la suma de los tres números de cada lado sea igual?

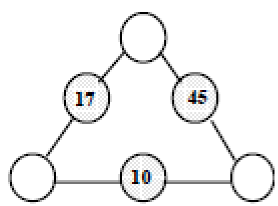


Figura 1. Problema de los números en el triángulo.

Hay muchas soluciones para este problema: ¿Se puede hallar otra solución? Y ¿Cuántas soluciones diferentes podría haber?
Hay un número infinito de soluciones, sin embargo, los alumnos suelen tener dificultades para encontrar más de una.

2) Se puede agrandar el dominio de números accesables, los alumnos suponen que los números colocados en los círculos vacíos son números naturales: ¿Es posible usar números negativos en los círculos? Ello es posible.
Al fijar la suma lateral, se obtiene un tipo diferente de problema. Para practicar con números negativos, se puede poner cero (o algún número negativo) en la suma:

¿Se puede hallar una solución donde la suma lateral del triángulo (es decir, la suma de los números en el mismo lado) sea 80? Si no hallan una regla general, esto podría ser un buen lugar para la práctica sistemática de prueba y error.

3) Una ampliación es preguntar por el posible dominio numérico: ¿Qué números son posibles como suma lateral del triángulo? La mayoría de los alumnos sugieren aquí enteros. Después de las negociaciones, podrían ver las posibilidades de fracciones, pero los números irracionales parecen ser imposibles para ellos pensar e inventar.

4) La cuestión de la generalización puede ser discutida también dentro de este campo problemático: ¿Cómo podría generalizarse el problema?

En el diseño de problemas se pueden utilizar ideas como las ecuaciones de agujeros (se desconoce el operando y se conoce la operación, o se conocen los operandos o alguno de ellos y el resultado y se desconoce la operación), o la manipulación simultanea de áreas y perímetros (¿cómo se calcula el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro es *p*? ¿el perímetro de un círculo cuya área es *A*?).

Problema 2. Comparación de áreas. Se tiene un cuadrado de lado *2a* del que se elimina un triángulo isósceles de base *2a* y altura *x* y un rectángulo de área *a·4a* del que se retira una pieza rectangular de área *a·x*.

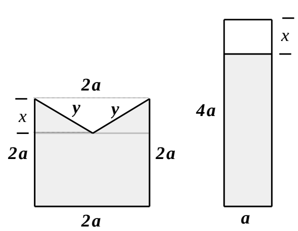


Figura 2

a) Calcúlese el valor de *a* para que el área del cuadrado sea igual al área del rectángulo, incluyendo en ambos casos las partes claras de la figura 2.

b) Calcúlese el valor de *x* para que las áreas claras sean iguales.

c) Calcúlese el valor de *x* para el cual las figuras claras tengan el mismo perímetro.

Problema 3. Una **pirámide de Pascal** es tal que el número de cada casilla debe ser igual a la suma de los números de las dos casillas sobre las que se apoya. La pirámide de la figura 3 sirve de ejemplo de cómo se llena. Completa correctamente las pirámides de las figuras 4, 5, 6. Para la solución se pueden introducir variables.

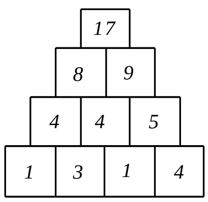


Figura 3. Pirámide de Pascal de 4 filas

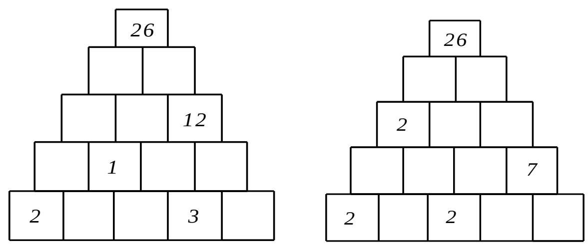


Figura 4. Dos pirámide de Pascal de 5 filas

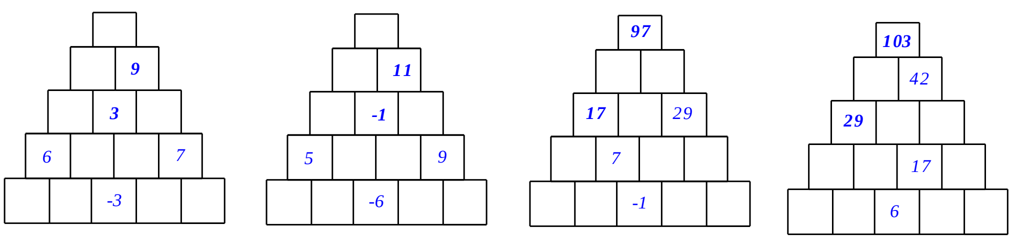


Figura 5. Cuatro pirámides de Pascal de 5 filas

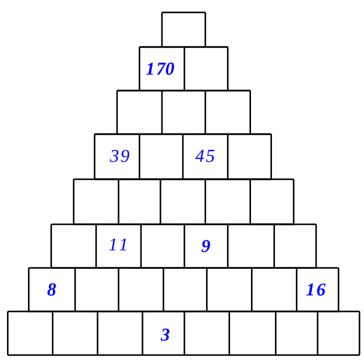


Figura 6. Pirámide de Pascal de 8 filas

Problema 4. a) Un auto llevó una velocidad de 90 km/h durante la primera mitad del tiempo que estuvo en movimiento y una velocidad de 50 km/h durante la segunda mitad ¿Cuál fue la velocidad media del auto?

b) Un auto llevó una velocidad de 90 km/h mientras recorría la primera mitad del camino y una velocidad de 50 km/h mientras recorría la segunda mitad ¿Cuál fue la velocidad media del auto?

c) ¿Son iguales las velocidades medias de los autos en a) y en b)?

Problema 5. En la figura 7, las $\overleftrightarrow{AS}$, $\overleftrightarrow{AT}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son tangentes a la circunferencia en los puntos S, T y R respectivamente. Si *AS* = 30 cm, calcular el perímetro del Δ*ABC*.

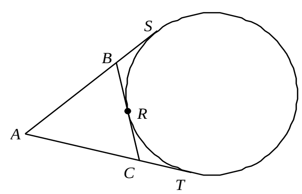


Figura 7. Comparar el perímetro del ΔABC con las longitudes AS o AT.

Problema 6. Una variante del problema anterior sería: la figura 8, muestra un círculo y dos segmentos tangentes.

a) Verifíquese que $\Delta ABC \cong \Delta ADC$.

b) ¿Qué relación hay entre la suma de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ con el perímetro del triángulo formado por los dos segmentos tangentes y una tercer tangente al círculo que corte a los dos segmentos?

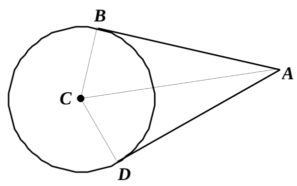


Figura 8. Situación básica: un círculo y dos segmentos tangentes.

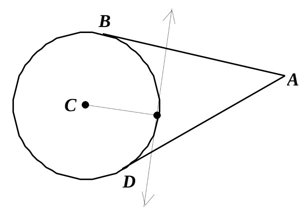


Figura 9. Un círculo, dos segmentos tangentes y una tercer tangente al círculo que corta a los dos segmentos

Cuatro problemas de final abierto del tema 3.1. Variación proporcional directa e inversa

Por Francisco Mendoza Cano

Actividad 1: Comparación de longitudes

Preparación

Previo al día planeado a realizar esta actividad, se pide a los alumnos que traigan un popotillo delgado y seco de cualquier longitud, que se pueda romper fácilmente y de diferentes longitudes. Si la mayoría de los estudiantes tienen popotillos de casi la misma longitud, se pide a algunos de ellos que corten una porción de su popotillo para acortar la longitud. Las piezas de repuesto se pueden dar a los estudiantes que no han traído un popotillo. Si algunos estudiantes olvidaron traer un popotillo, se pregunta a otros estudiantes si serían lo suficientemente amables como para compartir una parte de su popotillo con estos estudiantes.

Popotillo. (Fuente https://www.pinterest.es/pin/491947959275186702/)

La actividad

Coloque a los estudiantes en parejas o grupos pequeños.

Pídales a sus alumnos que respondan las siguientes preguntas en sus grupos o parejas:

- ¿Quién tiene el popotillo más corto?
- ¿Cuál es la diferencia entre las longitudes de popotillos más cortos y más largos?

• ¿Cuántas veces cabe el popotillo más pequeño en el popotillo más grande?

• En preguntas anteriores ¿comparó las longitudes de los popotillos más cortos y más largos de dos maneras? ¿cuál es la diferencia entre estas dos formas de comparación?

Deje que algunos grupos presenten sus hallazgos a la clase para iniciar una discusión, guíe a los estudiantes a descubrir los efectos físicos de la multiplicación.

Actividad 2. Tamaño del zapato contra la estatura

La actividad

Dígales a sus alumnos que la figura muestra el par de zapatos más grande del mundo.

Uno de los zapatos más grandes del mundo, en exhibición en Marikina, 'La capital del calzado de Filipinas', certificada por la Guinness. Libro de los récords mundiales en 2002. (Fuente: Ramón F. Velásquez)

El zapato mide 5.29 metros (17.4 pies) de largo y 2.37 metros (7 pies 9 pulgadas) de ancho. Se dice que es equivalente a un tamaño de zapato francés de 753. El tamaño del zapato francés de 34 es equivalente al tamaño del zapato indio de 6.

Si sus estudiantes tienen acceso a Internet, podrían buscar más fotografías e información sobre este par de zapatos. Si tiene acceso a una impresora, puede imprimir algunas fotografías más grandes para compartirlas en la clase o para ayudar a crear una emocionante muestra mural del trabajo de los estudiantes después de la actividad.

Si este era tu zapato, ¿qué tan alto serías? Dígales a sus alumnos que hablen de cómo resolverían el problema. Después de unos minutos, comparta ideas con toda la clase y acuerde qué ideas se deben seguir explicando.

¿Todos tus estudiantes participaron? Si no, ¿cómo puedes alentar una mayor participación la próxima vez?

Actividad 3: Gulab yamunes y variaciones directas e inversas

Parte 1. Planificación de una dulcería

Presentación. El gulab-yamun [guláb djámun] es un dulce de las cocinas de Pakistán e India, elaborado con una masa, en la que sus principales ingredientes son leche condensada evaporada (khoya) y harina (maida), que luego es frita en aceite en forma de pequeñas bolas. Después, se ponen en un almíbar elaborado con agua, azúcar, agua de rosas, cardamomo y se colorea con algunas hebras de azafrán que le proporcionan el color rojo característico.
(https://es.wikipedia.org/wiki/Gulab_yamun)

Preparación de gulab-yamunes ligeramente enrojecidos por el azafrán.

Problema. La dulcería "*La canica dulce*" prepara gulab yamunes que son esferas de diámetro de 1.5 pulgadas. El costo de cada gulab yamun es de 12 rupias. En cada caja de 1 kg se empacan 24 gulab yamunes.

• ¿Crees que todas las tiendas de dulces en India preparan gulab yamunes con el mismo diámetro de 1.5 pulgadas?

• ¿Crees que todas las tiendas de dulces en la India venden gulab yamun a 12 rupias?

Ahora, imagina que estás abriendo una dulcería y estás pensando en vender gulab yamunes, figura de abajo, pero quieres que la tuya sea un poco diferente de *La canica dulce*.

• Si aumenta el diámetro del gulab yamun ¿esperas que el precio del gulab yamun aumente o disminuya?

• Si aumenta el diámetro del gulab yamun ¿aumentará o disminuirá el número de gulab yamunes que pueden empacarse en una caja?

• En los negocios siempre es importante prever lo que sucederá cuando cambies algo. Con base en tus respuestas hasta el momento, completa una copia de la Tabla 1 a continuación. En la tabla, más (+) denota aumento en el valor y menos (-) indica una disminución en el valor. En la celda donde aparece un + o un - se anota un valor arbitrario y se tienen que calcular los otros dos valores de la fila.

Tabla 1. Planificación para abastecer la dulcería

Tamaño de gulab yamun	Precio de gulab yamun	No. de gulab yamunes en caja de 1 kg
	+	
		+
+		
-		
	-	
		-

Esta parte de la actividad es adecuada para convertirse en un juego de roles. Por ejemplo, es posible que desee organizar su clase en grupos, con cada grupo inventando un nombre para su tienda de dulces y asignando roles a los miembros del grupo. El recurso clave 'Narración de cuentos, canciones, juegos de roles y drama' (http://tinyurl.com/kr-ssrpd) te ayudará si decides usar este enfoque.

Parte 2. Explorando la variación directa e inversa

• Pida a cada alumno, solos o en parejas, que piensen en su tienda de dulces y que escriban tantos pares de cantidades que puedan pensar cuyos valores estén relacionados entre sí.

• Pida a los estudiantes que clasifiquen cada par de cantidades como:
o Variación directa: si una cantidad aumenta, la otra también.
o Variación inversa: si una cantidad aumenta, la otra disminuye.
o Sin variación: un cambio en una de las cantidades no significa un cambio en la otra cantidad.

Parte 3. Finalizando la lección

En el estudio de caso 3 a continuación, la Sra. Rawool finaliza esta actividad al proporcionar descripciones directas, indirectas y sin proporción, así como algunos ejemplos. ¿Cómo terminará su lección y resumirá el aprendizaje?

Actividad 4. Diseño de un cono

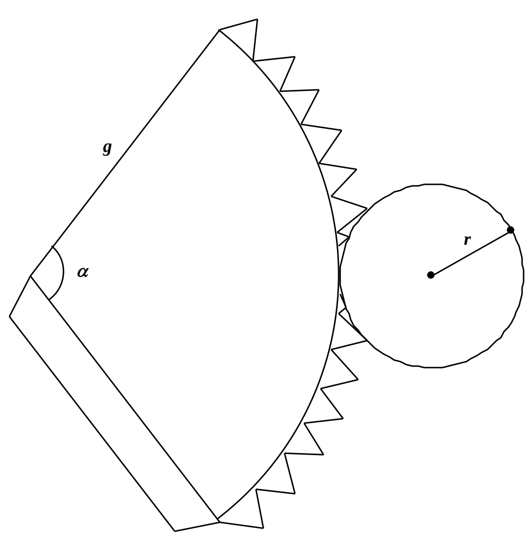
En una clase previa a la actividad: Se pide a los alumnos que lleven un pedazo de cartulina de aproximadamente 32×32 cm, unas tijeras chatas, lápiz adhesivo y un transportador.

La actividad

Se pide a cada alumno el día y el mes de su nacimiento.

Se le indica que tendrán que diseñar un cono cuya generatriz *g* sea igual a su día de nacimiento en cm, y el radio de la base del cono igual al número de mes en que nacieron.

El cálculo del ángulo α del sector circular lo tendrán que calcular cada uno de ellos según corresponda.



Problemas de final abierto sobre funciones lineales

Por Dante Octavio Carretero Ortega

Problema 1. Un caracol avanza a 50 cm por hora y otro avanza a 37cm por hora. Si el último le lleva una ventaja de 39 cm al otro ¿en cuánto tiempo alcanzará el primero al segundo?

Solución

Si definimos "y" como la distancia recorrida, y "x" como el tiempo, la distancia del primer caracol se representa como y = 50x, y la distancia que lleva recorrida el segundo, sería de y = 37x + 39.

El primer caracol alcanzará al segundo cuando recorra la misma distancia que éste, o sea, cuando 50x = 37x + 39, despejando, el tiempo resulta que es igual a 3 horas.

Problema 1_1. Si un caracol es más lento que otro, y le lleva una ventaja de 39 cm, al último, ¿Qué posibles velocidades pueden tener los caracoles, si se desea que el más rápido alcance al lento en 3 horas?

Solución

Si V_1 es la velocidad del más rápido, y V_2 es la del lento, quedaría que

$(V_1)x = (V_2)x + 39$.

Como sabemos que x = 3, tendríamos $(V_1)(3) – (V_2)(3) = 39$, simplificando se obtiene que $(V_1) – (V_2) = 13$.

Entonces hay que encontrar dos números que restados den 13, y en donde no se aceptan valores negativos.

Por ejemplo 14 y 1: después de 3 horas el que tiene velocidad de 14 cm/h recorrió 42cm, y el otro recorrió 3cm. Más los 39 que llevaba también dan 42cm.

Otro ejemplo no tan extremo es 29 y 16 (29 – 16 = 13): después de 3 horas el más rápido recorrió 29*3 = 87, y el otro recorrió 16*3 + 39 = 48 + 39 = 87, etc.

Otro problema que aunque es de funciones escalonadas, se puede modelar con funciones lineales:

Problema 2. Una compañía telefónica cobra una renta mensual de \$150 pesos y \$4 por cada llamada. Otra compañía, cobra una renta de \$222 y \$2.5 por llamada ¿cuántas llamadas tendría que realizar una persona al mes para que el costo en cualquier compañía sea el mismo?

Solución

Si "y" es el costo mensual del recibo telefónico, y x el número de llamadas, luego, para la primera compañía tendríamos $y = 150 + 4x$, y para la segunda

$y = 222 + 2.5x$.

Como queremos que el costo sea el mismo, igualamos las expresiones y nos queda $150 + 4x = 222 + 2.5x$, en donde al despejar nos da que $x = 48$.

Variación del problema anterior

Problema 2_1. Si una persona hace 100 llamadas al mes, y una compañía le cobra \$4 por llamada y otra \$2.5 por llamada ¿cuáles podrían ser las posibles rentas mensuales (ordenadas al origen) que podría cobrar cada compañía para que el costo mensual del servicio sea el mismo?

Sea A la cuota de la primera compañía y B la de la segunda. Nos quedaría la igualdad $A + 4x = B + 2.5x$, en donde $A – B = 1.5x$; como $x = 100$, hay que buscar dos números que restados nos den 150, y de esa manera se hallarían las posibles respuestas.

Problemas de final abierto de Sistemas de ecuaciones lineales 3x3

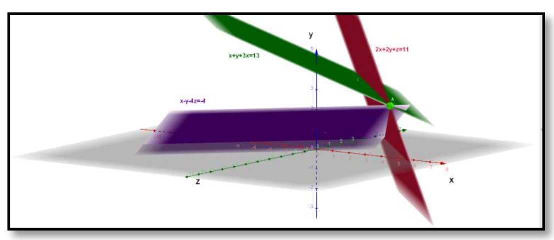
Por Verónica Méndez Nolasco

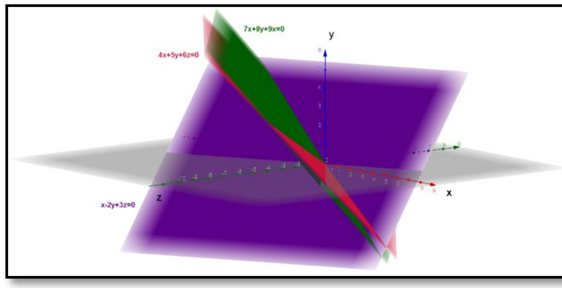
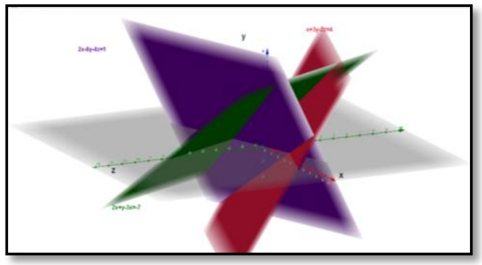
Un **sistema de ecuaciones lineales 3x3** es un sistema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas. Se llama 3x3 por que se suele usar matrices para resolverlo y se forman 3 filas y 3 columnas (y una cuarta columna para los términos independientes).

Se dice que **la solución de un sistema de ecuaciones lineales 3x3** es la terna de valores (*x, y, z*) que sea solución de las tres ecuaciones a la vez. Las soluciones de este tipo de sistemas son los puntos de corte de los tres planos que representan a cada una de las ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Tipos de sistemas

Sistema compatible determinado con una única solución (*x, y, z*).	

Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones (x, y, z).	
Sistema Incompatible que no tiene solución	

Resolver los problemas:

Problema 1. El dueño de un bar ha comprado refresco, cerveza y vino por el importe de \$500 (sin impuesto). El valor del vino es de \$60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben de pagar de IVA el 6%, por la cerveza el 12% y por el vino el 30%, lo que hace que la factura total con impuesto sea de \$92.40. Calcula la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

Solución. Termina por resolverlo.

x = Costo de los refrescos $\quad x + y + z = 500$

y = Costo de la cerveza $\quad x + y - 60 = z$

z = Costo del vino $\quad 0.06x + 0.12y + 0.3z = 92.4$

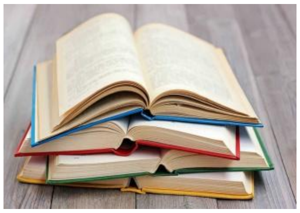
Problema 2. El dueño de un bar ha comprado refresco, cerveza y vino por *cierta cantidad* (sin impuesto). El valor del vino es de $60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos se paga de IVA el 6%, por la cerveza el 12% y por el vino el 30%, lo que hace que la factura total incluyendo el impuesto sea de $92.4. Calcula el costo de cada bebida sin incluir el impuesto.

Solución. Termina por resolverlo.

x = Costo de los refrescos $\quad x + y + z = \#cantidad$

y = Costo de la cerveza $\quad x + y - 60 = z$

z = Costo del vino $\quad 0.06x + 0.12y + 0.3z = 92.4$



Problema 3. En una tienda, un cliente se ha gastado $150 en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado $20, cada libro $15 y cada carpeta $5. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución. Termina por resolverlo.

x =# discos $\quad x + y + z = 12$

y =# libros $\quad 20x + 15y + 5z = 150$

z =# carpetas $\quad x + z = 3y$

Problema 4. En una tienda, un cliente se ha gastado *cierta cantidad* en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado \$20 cada libro \$15 y cada carpeta \$5 Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que libros. Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución. Termina por resolverlo.

x =# discos

y =# libros

z =# carpetas

$$x + y + z = 12$$
$$20x + 15y + 5z = \#cantidad$$
$$x + z = 3y$$

Problema 5. Calcula el área de un triangulo con las siguientes condiciones: Su perímetro es igual a 24cm. El doble de la hipotenusa es igual al doble del cateto menor más el mayor. Seis veces el cateto menor más ocho veces el mayor menos 10 veces la hipotenusa es igual a cero.

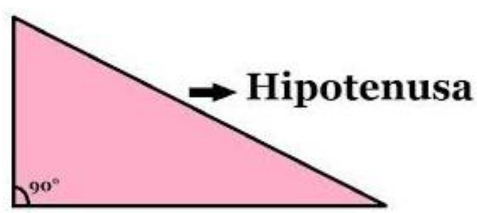
Solución. Termina por resolverlo.

x =hipotenusa

y =C_{mayor}

z =C_{menor}

$$x + y + z = 24$$
$$2x = 2z + y$$
$$6z + 8y - 10x = 0$$
$$y^2 + z^2 = x^2$$



Problema 6. Calcula el área de un triángulo con las siguientes condiciones: tiene *cierto perímetro* en cm. El doble de la hipotenusa es igual al doble del cateto menor más el mayor. Seis veces el cateto menor más ocho veces el mayor menos 10 veces la hipotenusa es igual a cero.

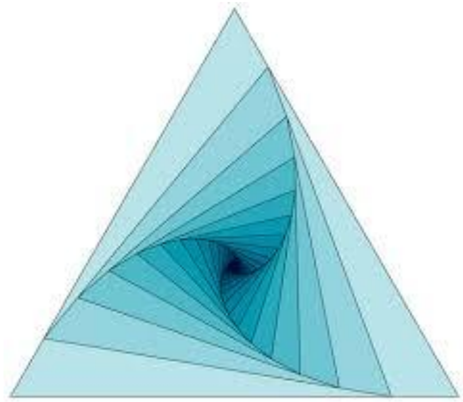
Solución. Termina por resolverlo.

x =hipotenusa

y =C_{mayor}

z =C_{menor}

$$x + y + z = \# \, perimetro$$
$$2x = 2z + y$$
$$6z + 8y - 10x = 0$$
$$y^2 + z^2 = x^2$$



Problema 7. En una hora en la carretera México - Cuernavaca han ingresado 300 vehículos a la CDMX. A los autobuses de pasajeros se les cobran $200.00, a los automóviles $120.00 y a los transportes de carga $150.00, si los autobuses de pasajeros y de carga son el doble que los automovilistas y en esa hora se han recabado $49,500.00 ¿Cuántos vehículos de cada clase han ingresado en esa hora a la CDMX?

Solución. Termina por resolverlo.

x = No. de autobuses

y = No. de automóviles

z = No. de transportes de carga

$$200x + 120y + 150z = 49500$$
$$x + y + z = 300$$
$$x + z = 2y$$

Problema 8. En una hora en la carretera México - Cuernavaca han ingresado 300 vehículos a la CDMX. A los autobuses de pasajeros se les cobran \$200.00, a los automóviles \$120.00 y a los transportes de carga \$150.00, si los autobuses de pasajeros y de carga son el doble que los automovilistas y en esa hora se ha recabado *cierta cantidad* ¿Cuántos vehículos de cada clase han ingresado en esa hora a la CDMX?

Solución. Termina por resolverlo.

x = No. de autobuses

y = No. de automóviles

z = No. de transportes de carga

$$200x + 120y + 150z = \$ \text{ cantidad}$$
$$x + y + z = 300$$
$$x + z = 2y$$

Problema 9. En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos cuesta \$56. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta \$46. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta \$68 ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?

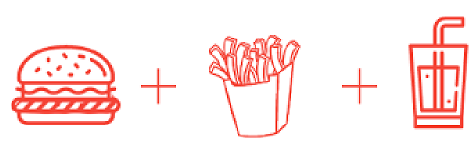
Solución. Termina por resolverlo.

x = Costo de una hamburguesa

y = Costo de un paquete de papas

z = Costo de un refresco

$$5x + 2y + 3z = 56$$
$$4x + 3y + 2z = 46$$
$$6x + 4y + 3z = 68$$



Problema 10. En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos *cuesta cierta cantidad en pesos*. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta 46 pesos. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta 68 pesos ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?

Solución. Termina por resolverlo.

x = Costo de una hamburguesa

y = Costo de un paquete de papas

z = Costo de un refresco

$$5x + 2y + 3z = \$cantidad$$
$$4x + 3y + 2z = 46$$
$$6x + 4y + 3z = 68$$

Problemas de final abierto de Unidad 4. Sistemas de ecuaciones lineales

Tomados de la Promoción 40 de Matemáticas I a IV

Selección de Francisco Mendoza Cano

1. ¿Cuántas parejas de números (b, c) permiten que las ecuaciones
$3x + by + c = 0$ y $cx - 2y + 12 = 0$ y tengan las mismas raíces?
R. 2 parejas.

2. K y M son dos números reales, tales que K es menor que M. P y Q son dos números reales entre K y M tales que: La distancia de P a M es las dos terceras partes de la distancia de K a P. La distancia de Q a M es la mitad de la distancia de K a Q. Determinar los valores de K y M si se sabe que P es cinco séptimos y que Q es tres cuartos.
R. K = 11/28, M = 13/14.

3. ¿Cuántos números distintos pueden ser expresados como la suma de tres números distintos del conjunto {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19}? Escríbanse cuáles son esos números
R. 13.

4. En una fiesta, la cantidad de personas que bailan es el 25% de la cantidad de personas que no bailan. ¿Qué porcentaje del total de personas en la fiesta no bailan?
R. 80%

5. En una fiesta, la cantidad de personas que bailan es un cierto % de la cantidad de personas que no bailan. ¿Qué porcentaje del total de personas en la fiesta no bailan?

6. Una mezcla de 200 litros está compuesta por las sustancias A, B y C. Si la suma de las cantidades de litros que tiene la mezcla de las sustancias A y B es el

triple de la cantidad de litros que tiene *C*, y la sustancia *B* conforma el 35 % de la mezcla, ¿cuántos litros de cada sustancia tiene la mezcla?
R. Tiene 80 litros de la sustancia *A*, 70 litros de la sustancia *B* y 50 litros de la sustancia *C.*

7. Una mezcla de cierta cantidad de litros está compuesta por las sustancias *A, B* y *C*. Si la suma de las cantidades de litros que tiene la mezcla de las sustancias *A* y *B* es el triple de la cantidad de litros que tiene *C*, y la sustancia *B* conforma un % igual al número de litros de la mezcla, ¿cuántos litros de cada sustancia tiene la mezcla?

8. Un número de tres dígitos es 35 veces la suma de sus dígitos. La suma del dígito de las unidades con el de las decenas, es dos veces el dígito de las centenas. Cinco veces la suma del dígito de las centenas con el de las decenas, es cuatro veces el dígito de las unidades. Encuentra el número.
R. Los números de tres dígitos son 000 y 315.

9. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$kx + ky + kz = k$

$kx + 2ky + (3k + 3)z = 3 + k$

$kx + ky + (k^2 + 2k - 2)z = 2k - 1$

encontrar el o los valores de *k*, para que el sistema sea:

a) Compatible determinado

b) Compatible indeterminado

c) Incompatible

R. a) $\forall\ k \neq 1$ y $k \neq -2$.

b) $k = 1$.

c) $k = -2$, $k = 0$.

Respuesta personal:

Tipo de sistema	Valores de k	Solución
a) Compatible determinado	Para todo k ≠ 0, k ≠ 1 y k ≠ -2	$\left(\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{k^2-3}}{\boldsymbol{k(k+2)}},\ \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k+3}}{\boldsymbol{k(k+2)}},\ \boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k+2}}\right)$
b) Compatible indeterminado	k = 1	*(x = 4a – 2, y = 3 – 5a, z = a)*, con *a* un número arbitrario.
c) Incompatible	k = 0 ó k = -2	No tiene