UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL NAUCALPAN

GUÍA DE MATEMÁTICAS III PLAN ACTUALIZADO

SEMINARIO LOCAL DE MATEMÁTICAS, TURNO MATUTINO

Naucalpan de Juarez, 2019

Guía de Matemáticas III.

La presente guía fue elaborada en el Área de Matemáticas del Plantel Naucalpan del Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México.
La publicación es un producto del Seminario Local de Matemáticas del CCH-Naucalpan. ***Turno Matutino****.*

Coordinador
Ismael Nolasco Martínez

Autores

Angélica Garcilazo Galnares
Blanca Elizabeth Cruz Estrada
Brenda del Carmen Muñoz Ramírez
Dante Octavio Carretero
Emelia Norma Venegas Ocampo
H. Laura Paz Santiago
Ismael Nolasco Martínez
Omar Anguiano Sánchez
Pedro Cázares Mena
Sandra Verónica Roldán Meneses
Verónica Méndez Nolasco
Viviana Vázquez

Primera versión: Diciembre de 2017.

Av. De los Remedios No.10
Naucalpan de Juárez.
Teléfonos: 53600323; 53600324.
Naucalpan de Juárez, estado de México.

Índice

UNIDAD 1. ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

Propósito:

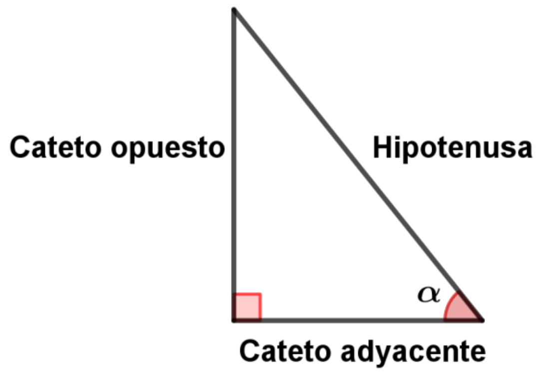
Al finalizar la unidad el alumnado utilizará las razones e identidades trigonométricas, así como las leyes de senos y cosenos mediante la resolución de problemas en distintos contextos que involucren triángulos con la finalidad de construir conocimientos que serán empleados en asignaturas posteriores

Aprendizajes:

- Explorará diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simbolizará y distinguirá el dominio y el rango.
- Comprenderá que el concepto de razón trigonométrica se deriva de la relación de los lados de un triángulo rectángulo y que son respectivamente invariantes en triángulos semejantes.
- Determinará los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° y empleará la calculadora para verificarlos.
- Resolverá problemas que involucren triángulos rectángulos.
- Comprenderá la deducción de algunas identidades trigonométricas.
- Comprenderá el proceso de deducción de las leyes de senos y de cosenos, para resolver problemas sobre triángulos oblicuángulos.

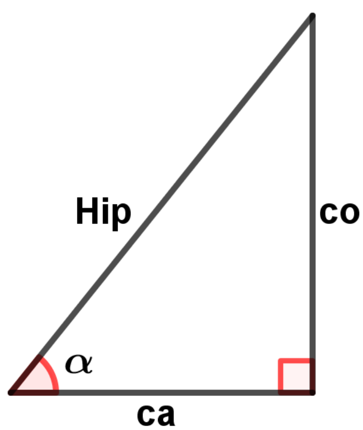
ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA

El relacionar los lados y ángulos en un triángulo es tarea fundamental de la trigonometría para ello utilizamos un triángulo rectángulo, los ángulos a estudiar son los ángulos agudos, como el mostrado en la siguiente figura (ángulo α)



En la figura se muestran tres lados, el lado de mayor longitud es la hipotenusa, los otros dos lados se llaman catetos, el cateto adyacente es el lado pegado al ángulo y el cateto opuesto es el lado que está enfrente de dicho ángulo.
Cuando se asocian los lados con respecto al ángulo se obtienen seis razones llamadas razones trigonométricas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



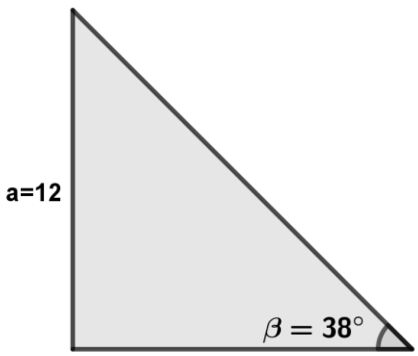
$$sen\alpha = \frac{co}{hip} \qquad \cot\alpha = \frac{ca}{co}$$

$$\cos\alpha = \frac{ca}{hip} \qquad \sec\alpha = \frac{hip}{ca}$$

$$\tan\alpha = \frac{co}{ca} \qquad \csc\alpha = \frac{hip}{co}$$

Ejemplo:

Calcula la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo.



$co = 12$

$\beta = 38^0$

La información que se tiene es la de un ángulo β y el cateto opuesto. La razón trigonométrica que relaciona estos datos con la incógnita que es la hipotenusa, es la razón seno.

$$sen\beta = \frac{co}{hip}$$

Sustituimos los valores conocidos

$$sen(38^0) = \frac{12}{hip}$$

Despejando la hipotenusa

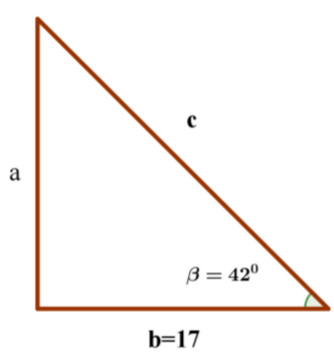
$$sen(38^0) \cdot hip = 12$$

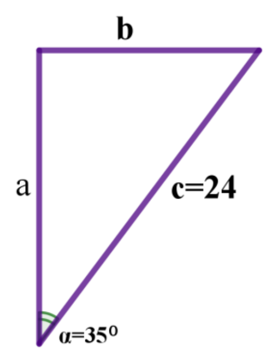
$hip = \dfrac{12}{sen(38^0)}$ utilizamos la calculadora

$hip = 19.49$ es el valor obtenido.

Ejercicios

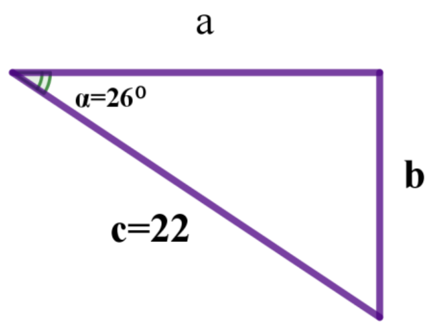
Determina los lados que faltan y el ángulo

<table>
<tr>
<td>1.-


Respuesta: $a = 15.30$ $\beta = 42^0$
$b = 17$ $\lambda = 48^0$
$c = 22.87$ $\alpha = 90^0$</td>
<td>2.-


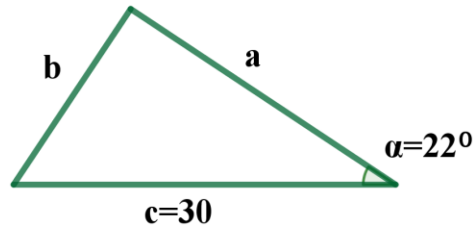
$a = 19.77$ $\lambda = 55^0$
Respuesta: $b = 13.77$ $\alpha = 35^0$
$c = 24$ $\beta = 90^0$</td>
</tr>
</table>

3.-



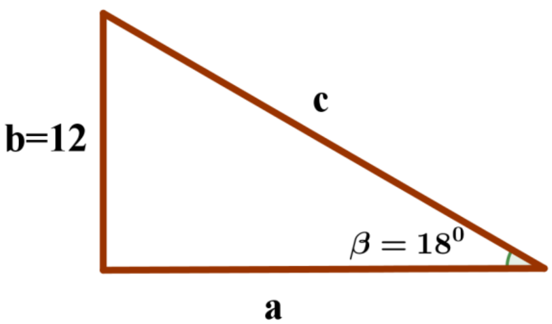
Respuesta: $\begin{array}{ll} a=19.77 & \beta=64^0 \\ b=9.64 & \alpha=26^0 \\ c=22 & \lambda=90^0 \end{array}$

4.-



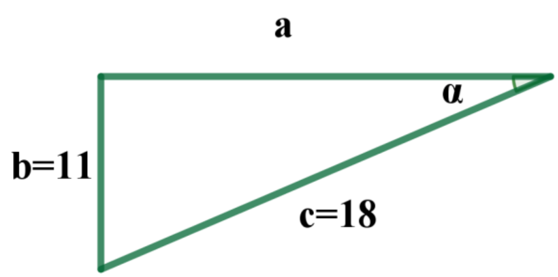
Respuesta: $\begin{array}{ll} a=27.81 & \beta=68^0 \\ b=11.23 & \alpha=22^0 \\ c=30 & \lambda=90^0 \end{array}$

5.-.



Respuesta: $\begin{array}{ll} a=36.93 & \beta=72^0 \\ b=12 & \alpha=18^0 \\ c=38.83 & \lambda=90^0 \end{array}$

6.-



Respuesta: $\begin{array}{ll} a=14.24 & \beta=52.34^0 \\ b=11 & \alpha=37.66^0 \\ c=18 & \lambda=90^0 \end{array}$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$sen\theta \csc\theta=1$ despejando nos queda $$sen\theta=\frac{1}{\csc\theta} \qquad (1)$$

$\frac{co}{hip}\cdot\frac{hip}{co}=1$ $$\csc\theta=\frac{1}{sen\theta} \qquad (2)$$

$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$ despejando nos queda $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ (3)

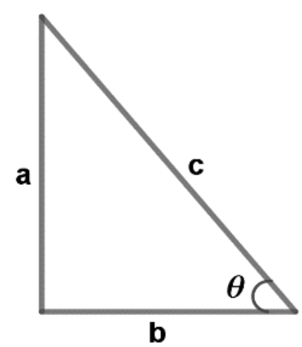
$\dfrac{ca}{hip}\cdot\dfrac{hip}{ca} = 1$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ (4)

$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$ despejando nos queda $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ (5)

$\dfrac{co}{ca}\cdot\dfrac{ca}{co} = 1$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ (6)

De acuerdo al siguiente triángulo se obtienen las fórmulas del cociente

Fórmulas del Cociente



$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \tan\theta$$

Inverso

$$\frac{\cos\theta}{sen\theta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \cot\theta$$

$\dfrac{sen\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ (7) y $\dfrac{\cos\theta}{sen\theta} = \cot\theta$ (8)

Fórmulas Pitagóricas

$c^2 = a^2 + b^2$ todo lo dividimos con el término c^2.

$\dfrac{c^2}{c^2} = \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2}$ igual a $1 = sen^2\theta + \cos^2\theta$ (9)

Si de la ecuación pitagórica

$c^2 = a^2 + b^2$ dividimos entre a^2, obtenemos:

$\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{a^2} + \dfrac{b^2}{a^2}$ igual a $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$ (10)

Si de la ecuación pitagórica

$c^2 = a^2 + b^2$ dividimos entre b^2**,** obtenemos:

$\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}$ igual a $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$ (11)

En resumen:

$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$	$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$	$1 = \csc^2\theta - \cot^2\theta$
$\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$	$1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$	$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

Ejemplo:

Utiliza las identidades trigonométricas demuestra la igualdad que a continuación se presenta:

Utilizando las Identidades trigonométricas

$$sen\theta \cdot \sec\theta \cdot \cot\theta = 1$$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$ **y** $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$$sen\theta \cdot \left(\frac{\cos\theta}{sen\theta}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = 1$$

Se sustituyen en la igualdad.

$$\frac{sen\theta \cdot \cos\theta \cdot (1)}{sen\theta \cdot \cos\theta} = 1$$

Multiplicando y dividiendo nos queda:

$$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$
$$1 = 1$$

Se comprueba la igualdad

Ejercicio

Demuestra las siguientes igualdades

1.- $\csc A \cdot \sec A = \cot A + \tan A$	6.- $sen(y) \cdot sec(y) = tan(y)$
2.- $\frac{\tan E}{senE} = \sec E$	7.- $\frac{tanx}{senx} = secx$
3.- $\frac{senx}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$	8.- $cot\ \alpha \cdot sen\alpha = csc\alpha$
4.- $\tan Z \bullet \cos Z \bullet \csc Z = 1$	9.- $tan\ \beta + cot\ \beta = sec\ \beta \cdot csc\ \beta$
5.- $\tan x + \cot x = \frac{1}{senx \cdot \cos x}$	10.- $1 - \tan^2 A = 2 - \sec^2 A$

LEY DE SENOS

Cuando un triángulo no es un triángulo rectángulo se dice que es triángulo oblicuángulo es decir, un ángulo es mayor de 90° y menor de 180°, o bien el triángulo puede ser acutángulo la medida de los ángulos son menores de 90°.

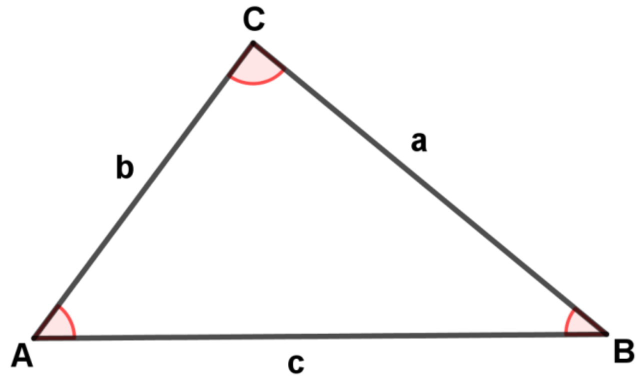
Para resolver este tipo de triángulos es indispensable conocer tres de sus elementos, uno de estos debe ser forzosamente un lado.

Esta ley se utiliza cuando se conocen:

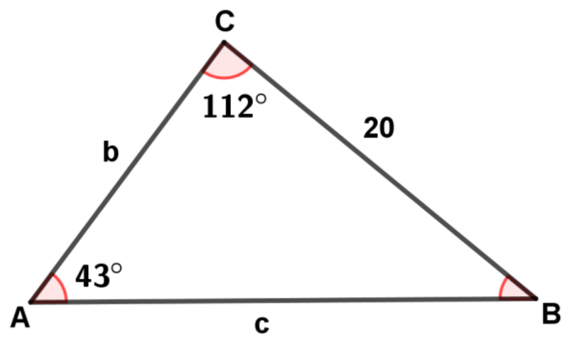
- Un lado y dos ángulos
- Dos lados y el ángulo opuesto a cualquiera de ellos

Ley de los senos

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$



Ejemplo: Obtener los valores faltantes del siguiente triángulo:



El ángulo B se obtiene fácilmente:

$B=180^0-(112^0+43^0)$ Suma de ángulos interiores

$B=25^0$

Aplicamos la fórmula de senos para obtener los lados faltantes:

$\frac{20}{sen\ 43^0}=\frac{c}{sen\ 112^0}$ Despejamos la incógnita **c**

$c=\frac{20\left(sen\ 112^0\right)}{sen\ 43^0}$ Usando la calculadora

$c=27.20$ Es el valor obtenido

Para obtener b

$\frac{20}{sen\ 43^0}=\frac{b}{sen\ 25^0}$ Empleamos nuevamente las parejas conocidas

$b=\frac{20\left(sen\ 25^0\right)}{sen\ 43^0}$ Despejando y usando la calculadora obtenemos

$b=12.40$ Es el valor obtenido del lado b

LEY DE LOS COSENOS

Se utiliza en triángulos oblicuángulos, en los que no es posible aplicar de entrada la ley de los senos.

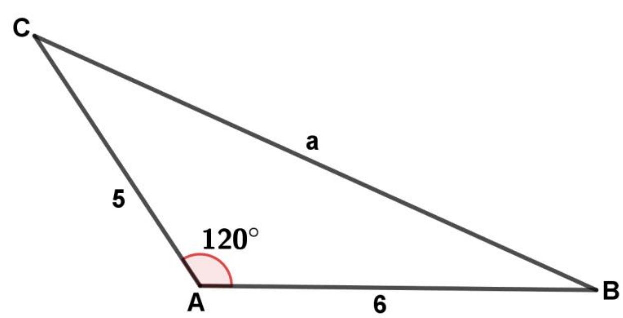
Se utiliza cuando:

- Se conocen los tres lados
- Cuando se conocen dos lados y un ángulo comprendido entre ellos

Ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(\cos A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac(\cos B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)$$

Calcula el lado a del siguiente triángulo.



Se conocen dos lados y un ángulo comprendido entre ellos, para obtener el lado a empleamos la siguiente fórmula.

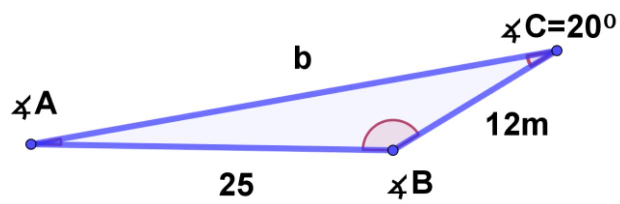
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \mathrm{A}$	Sustituyendo los datos
$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6) \cos 120^0$	Efectuando operaciones
$a = 9.5$	Valor obtenido

Resumen

Ley de senos	Ley de cosenos
$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$	$a^2=b^2+c^2-2bc(\cos A)$ $b^2=a^2+c^2-2ac(\cos B)$ $c^2=a^2+b^2-2ab(\cos C)$

Ejemplo

Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Alejandro (A), Brandon(B) y Camilo (C) entre Alejandro y Brandon hay 25m y entre Brandon y Camilo ,12m. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20^0. Calcula la distancia entre Alejandro y Camilo.



Información

$\measuredangle A=?$ $\quad a=12m$

$\measuredangle B=?$ $\quad b=?$

$\measuredangle C=20^0$ $\quad c=25$

La ley que se utiliza es la de senos esto por tener dos lados y un ángulo.

$$\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}$$

Se sustituyen los valores

$$\frac{12}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{25}{sen20^0}$$

Se utiliza la siguiente relación para encontrar el $\measuredangle A$

$$\frac{12}{senA}=\frac{25}{sen20^0}$$

Utilizamos producto cruzado

$$senA=\frac{(12)(sen20^0)}{25}=$$

Despejando el $\measuredangle A$

$$\measuredangle A=sen^{-1}\left(\frac{(12)(sen20^0)}{25}\right)\approx 9.449^0$$

Suma de ángulos interiores de un triángulo.

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^o$

Sustituimos los valores y despejamos el ángulo B.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^o$$

$$9.449^0 + \measuredangle B + 20^0 = 180^0$$

$$\measuredangle B = 180^0 - 9.449^0 - 20^0$$

$$\measuredangle B \approx 150.551^0$$

Para encontrar el lado b se sustituye el valor de $\measuredangle B$

$$\frac{b}{sen(150.551)} = \frac{25}{sen 20^0}$$

Despejando el lado b

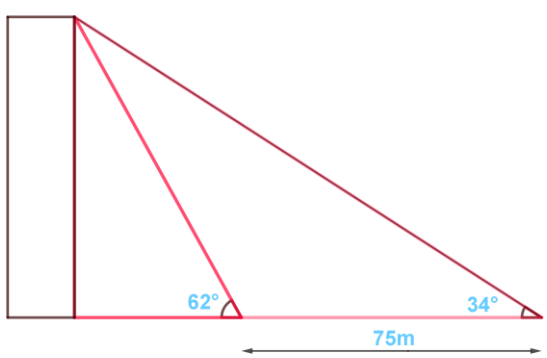
$$b = \frac{25\ (sen(150.551^0))}{sen 20^0} = 35.9371$$

La distancia entre Alejandro y Camilo es de $b = 35.9371 m$

EJERCICIOS

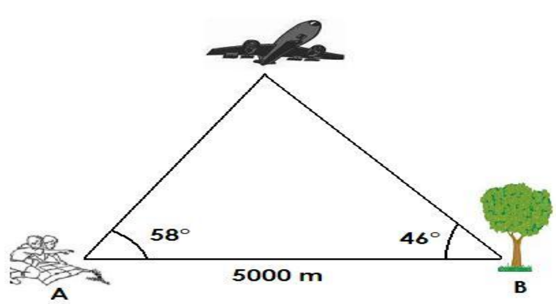
Problemas de senos y cosenos

1.-Calcular la altura de un edificio que se observa desde un punto en que el ángulo de elevación de 62^0 y, alejándose 75 m de ese punto al ángulo es ahora 34^0.



R= la altura es de 78.85 m
x= 41.93 m

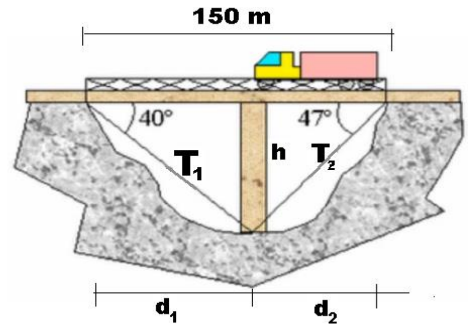
2.- Un piloto vuela una aeronave, encontrándose que el ángulo de elevación de un par de amigos a la aeronave es de 58°, el de un árbol a ella es de 46° y la distancia entre los amigos y el árbol es de 5000 m. ¿Determinar la distancia que hay de la aeronave a cada uno de los amigos?



R= $\measuredangle = 76^0$ y los lados

$a = 4370.04m$ y $b = 3706.80m$

3.- De acuerdo al esquema anexo, calcular la altura del soporte central y la distancia a la que se debe colocar de cada lado, así como los tensores de cable de acero que se colocaran a cada lado.



R= $T_1 = 96.55m,\ \ T_2 = 109.85m\ \ h = 70.61m$
$d_1 = 84.16m$ y $\mathrm{d}_2 = 65.84m$

4. Una pista de patinaje tiene las siguientes medidas 440, 280, y 460 m respectivamente, calcula la medida de los ángulos formados.

R= $\measuredangle A = 68.02^0 \quad \measuredangle B = 36.16^0 \quad \measuredangle C = 75^0$

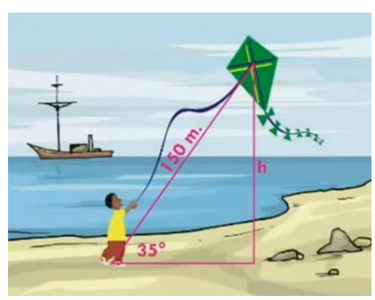
5. Dos lados de un paralelogramo miden 83 y 140 m y una de sus diagonales mide 189 m, calcular el área de uno de los triángulos formados.

R= $A = 5331.9m^2$

6. Calcula la altura si al situarnos desde el punto B se observa un ángulo de elevación de 45°, si nos alejamos 30 cm hacia el punto A se forma un ángulo de elevación de 30°. Apóyate en la siguiente figura.

R = $h = 40.98m$ y $x = 40.89m$

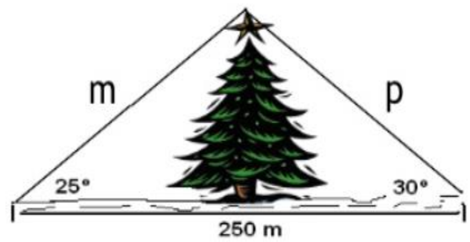
7. Juanito, juega en la playa con su papalote, ¿Cuánto logra elevarlo? Si la cuerda que manipula tiene una longitud de 150 m y forma un ángulo de elevación de 35º



R= $h = 86.03m$ aprox.

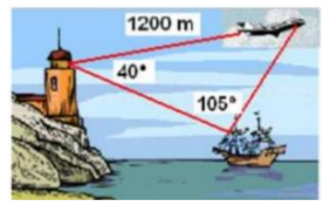
8.-Un árbol es observado por dos puntos opuestos, separados 250m con ángulo de elevación de 30^o y 25^o. ¿A qué distancia está la cúspide de cada punto de observación?

R= las $p = 128.98m$ y $\mathrm{m} = 152.59m$



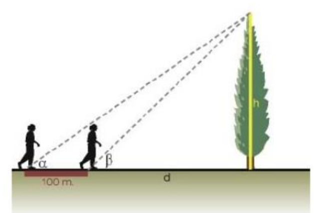
9.-Una persona observa un avión y un barco desde la cúpula de un faro, tal como lo muestra la figura. ¿Cuál es la distancia que hay del barco al avión?

R= la distancia $d = 798.55m$



10.- Si Marcos y Uriel caminan en el bosque y el ángulo de Uriel es de 20^o y de Marcos es de 35^o con respecto a un árbol, la separación que existe entre ellos es de 100m. Determina la altura del árbol.

R= $h = 75.79m$ la altura del árbol.



UNIDAD 2. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

Propósito:

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de manejar algebraicamente algunos conceptos básicos de la geometría euclidiana y algunos lugares geométricos con la finalidad de introducir el método analítico.

Aprendizajes:

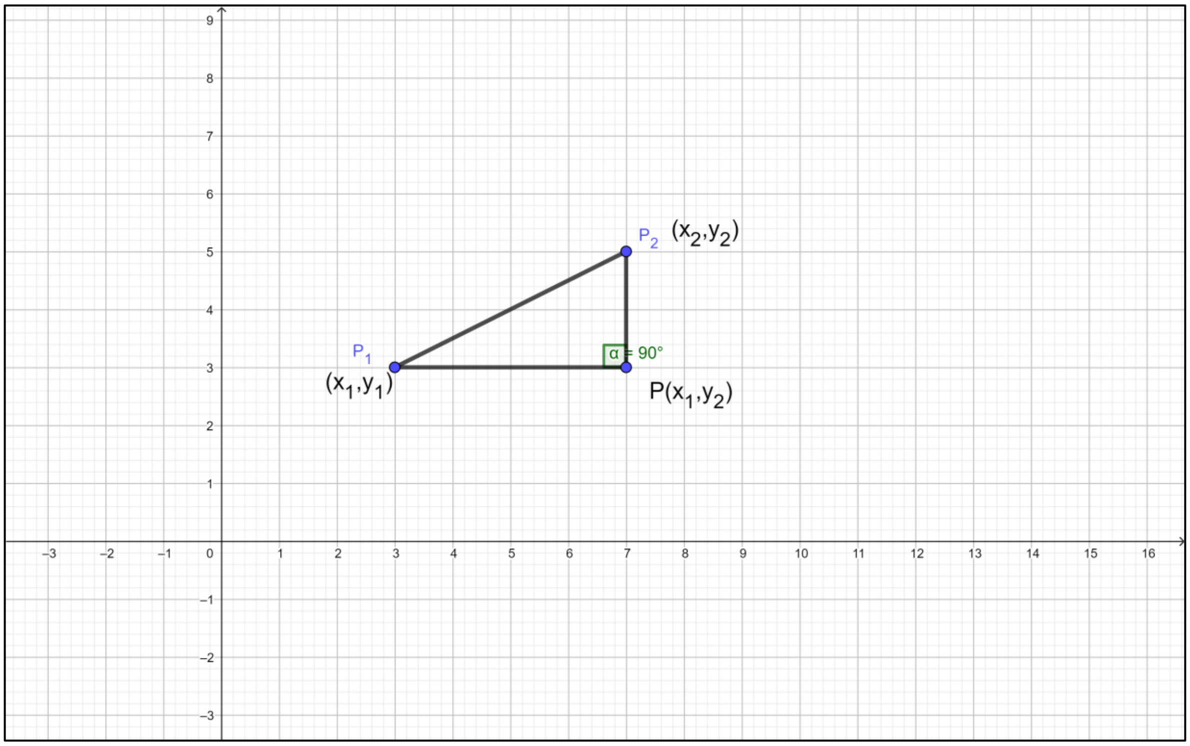
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Representará la ubicación de un punto en el plano utilizando un sistema de referencia cartesiano y viceversa.
- Localizará un segmento en el plano cartesiano y proporcionará la información suficiente para que otro alumno lo pueda hacer.
- Deducirá la fórmula para determinar la longitud de un segmento, dados sus puntos extremos y la aplicará en diferentes situaciones.
- Comprenderá el concepto de ángulo de inclinación de un segmento.
- Calculará el ángulo de inclinación a partir de las coordenadas de los extremos de un segmento.
- El alumno localizará un segmento dadas condiciones necesarias y suficientes, distintas a su determinación por sus puntos extremos.
- El alumno localizará los puntos de división de un segmento.
- Obtiene la expresión algebraica y la gráfica de un lugar geométrico.

ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Consideremos los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ en el plano cartesiano



Se define la distancia $d(P_1,P_2)$ entre dos puntos, como la longitud del segmento P_1P_2. Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se forma, tendremos

$$\left[d(P_1,P_2)\right]^2 = (\overline{P_1P})^2 + (\overline{PP_2})^2$$

Donde $\overline{P_1P} = x_2 - x_1$, $\overline{PP_2} = y_2 - y_1$

Al escribir explícitamente los valores de $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$, se obtiene la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo. Hallar la distancia entre los puntos A(-2,4), B(6,8)

Solución:

Si A(-2,4)= (x_1,y_1), entonces x_1=-2, y_1=4. Además, B(6,8)= (x_2,y_2) por lo que x_2 =6, y_2=8. Sustituyendo en la fórmula para la distancia entre dos puntos, resulta:

$$d=\sqrt{(6+2)^2+(8-4)^2}$$
$$d=\sqrt{8^2+4^2}$$
$$d=\sqrt{64+16}$$
$$d=\sqrt{80}$$
$$d=8.94$$

Ejemplo. Mostrar que los puntos A(-9,-3), B(-3,1) y C(6,7) son colineales.

Solución:

Decimos que los puntos son colineales si pertenecen a la misma línea recta. Para mostrar que los puntos son colineales debemos verificar que se cumple la igualdad

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$$

Primero calcularemos la distancia de A a B, luego de B a C y al final la de A a C.

de A a B

$$d_{AB}=\sqrt{(-3-(-9))^2+(1-(-3))^2}$$
$$d_{AB}=\sqrt{(-3+9)^2+(1+3)^2}$$
$$d_{AB}=\sqrt{6^2+4^2}$$
$$d_{AB}=\sqrt{36+16}$$
$$d_{AB}=\sqrt{52}\approx 7.21$$

De B a C:

$$d_{BC}=\sqrt{(6-(-3))^2+(7-1)^2}$$
$$d_{BC}=\sqrt{(6+3)^2+(6)^2}$$
$$d_{BC}=\sqrt{117}\approx 10.81$$

De A a C:

$$d_{AC} = \sqrt{(6-(-9))^2 + (7-(-3))^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{(6+9)^2 + (7+3)^2}$$
$$d_{AC} = \sqrt{325} \approx 18.02$$

Tomando los tres valores que hemos encontrado, observamos que efectivamente se cumple que 18.02= 10.81+7.21. luego los puntos A, B y C son colineales.

Ejercicios de Distancia

1. Demostrar que los puntos A(-2,-1), B(2,2) y C(5,-2) son los vértices de un triángulo isósceles.

Respuesta: Si porque $d\overline{AB} = d\overline{BC} = 5$ unidades

2. Demuestre que los siguientes puntos: A(6,5), B(3,7) y C(2,-1) corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su área.

Respuesta: Sí. Al obtener las distancias de AB, BC y AC, observamos que cumplen con el teorema de Pitágoras. Y al multiplicar los dos catetos, (que serían la base y la altura) obtenemos A=13 u^2

3. Demuestre que los puntos: A(12,1), B(-3,-2) y C(2,-1) son colineales, esto es, que están sobre una misma línea recta.

Respuesta:

$$d\overline{AB} = \sqrt{(12-(-3))^2 + (1-(-2))^2}$$
$$= \sqrt{225+9}$$
$$= \sqrt{234} = 3\sqrt{26}$$

$$d\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-2-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{25+1}$$
$$= \sqrt{26}$$

$$d\overline{AC} = \sqrt{(12-2)^2 + (1-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{100+4}$$
$$= \sqrt{104} = \sqrt{4(26)}$$
$$= 2\sqrt{26}$$

$$d\overline{AC} + d\overline{BC} = d\overline{AB}$$
$$2\sqrt{26} + \sqrt{26} = 3\sqrt{26}$$

Si, Los puntos son colineales, se encuentran sobre la misma línea recta.

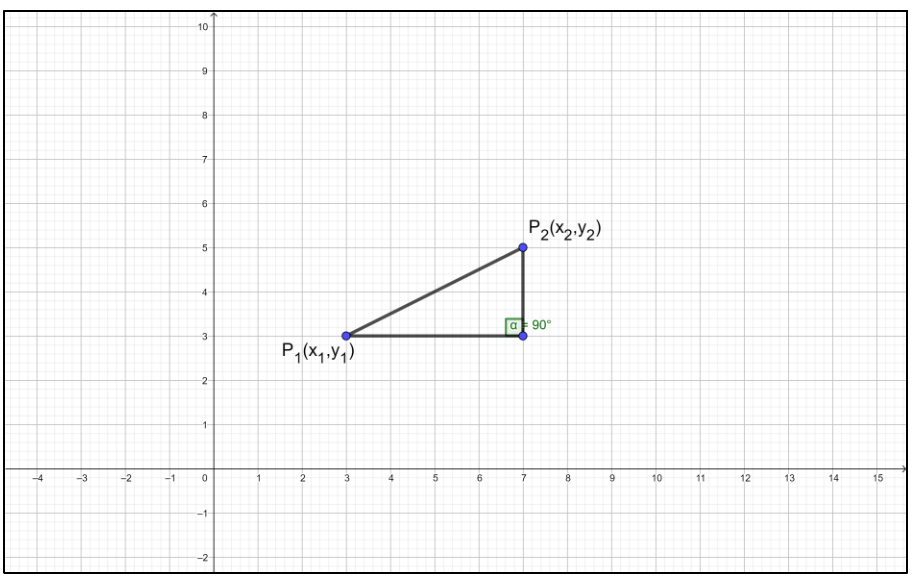
4. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: (0,0), (1,2) y (3,-4).
Respuesta: $A=5u^2$

5. Uno de los extremos de un segmento de recta rectilíneo de longitud 5 es el punto (3,-2). Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada. (Dos soluciones).
Respuesta: $y_1=-6$, $y_2=2$

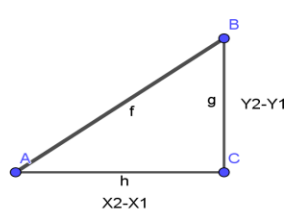
PENDIENTE Y ÁNGULO DE ELEVACION DE UNA RECTA

Pendiente de una recta

Sean los puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) en el plano cartesiano



Analizando el triángulo que se forma se tiene:



La pendiente m del segmento de recta que forman los puntos P_1 (x_1,y_1) y P_2 (x_2,y_2) se define de la siguiente manera:

$$m = \tan\theta = \frac{catetoopuesto}{catetoadyacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conociendo la pendiente, se puede conocer el ángulo de inclinación de la recta con la expresión:

$$\theta = \tan^{-1}(m)$$

Observaciones importantes:

Si m>0 la recta es creciente,
Si m<0 la recta es decreciente,
Si m=0 la recta es horizontal, su ángulo de inclinación es cero
Si la recta es vertical, su pendiente es infinita.

Ejemplo:

Dados los puntos A(3,7) y B(5,11), calcular su pendiente y su ángulo de inclinación.

Solución:

Los datos son A (3,7)= (x_1,y_1), entonces x_1=3, y_1=7. Además, B (5,11)= (x_2,y_2) por lo que x_2 =5, y_2=11. Aplicando la fórmula de pendiente se tiene:

$$m = \frac{11-7}{5-3} = 2$$

Luego el ángulo de inclinación está dado por $\theta = \tan^{-1}(2) = 63.43^{o}$

Ejercicios de Pendiente

1. Halla la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1,6) y (5,-2).

Respuesta: m= -2, ángulo=116.565°

2. Hallar el ángulo obtuso del paralelogramo cuyos vértices son: A(-2,1), B(1,5) y C(10,7) y D(7,3).

Respuesta:

$$m_{AD} = \frac{3-1}{7-(-2)} = \frac{2}{9} \qquad m_{DC} = \frac{3-7}{7-10} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

m_2 es la pendiente del segmento final que forma el ángulo, y m_1 es la pendiente del lado inicial que forma el ángulo. En nuestro ejemplo, m_2 es la m_{AD} y m_1 es la m_{DC} (recordemos que los ángulos se miden en sentido antihorario). Entonces tenemos:

$\tan\theta = \dfrac{\frac{2}{9} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}(\frac{2}{9})}$ que es igual a $\tan\theta = \dfrac{\frac{-10}{9}}{\frac{35}{27}}$

Y nos queda: $\tan\theta = \dfrac{-30}{35}$, por lo que $\theta = \tan^{-1}(\dfrac{-30}{35}) = 139.39^0$

3. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto (3,2). La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

Respuesta: y = 5, la coordenada completa es (4,5)

4. Hallar los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son los puntos A(-2,1), B(3,4) y C(5,-2). Comprobar los resultados.

Respuesta: Los ángulos son: 77°28', 54°10' y 48°22'

5. Por medio de la pendiente demuestre que los tres puntos A(6,-2), B(2,1) y C(-2,4) son colineales.

Respuesta:

Si los tres puntos son colineales, están sobre la misma recta, por lo que si obtengo la pendiente de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ ó $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ó $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, deben ser la misma.

$$m_{AB} = \frac{-2-1}{6-2} = \frac{-3}{4}$$
$$m_{BC} = \frac{1-4}{2-(-2)} = \frac{-3}{4}$$

Por lo tanto son colineales

6. Por medio de la pendiente demuestre que los tres puntos A(2,5), B(8,-1) y C(-2,1) son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar sus ángulos agudos.

$$m_{AB} = \frac{-1-5}{8-2} = \frac{-6}{6} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{1-5}{-2-2} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Como la condición de perpendicularidad es $m_1 m_2$ =-1, observamos que si multiplicamos m_{AB} por m_{AC} , queda -1(1)=-1, o sea que son perpendiculares las rectas con esas pendientes, y como esas rectas son los lados de un triángulo, el triángulo es rectángulo.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

La razón (r) es un cociente que compara que tan grande es una parte del segmento, con respecto a la parte restante, por ejemplo, si se divide al segmento AD en tres partes iguales, AB, BC y CD como se muestra en la figura:

Al comparar el segmento AC con el CB se obtiene:

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Lo que significa que el segmento AC es la mitad del tamaño del segmento CB.

En cambio, al comparar AD con DB se obtiene:

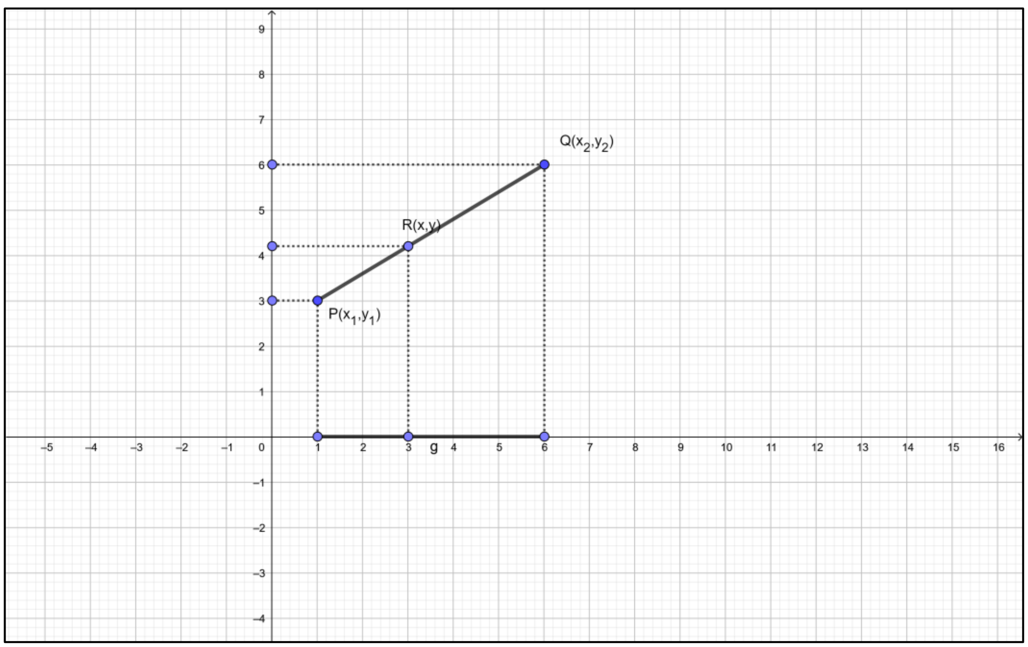
$$r = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

$$r = \frac{2}{1}$$

$$r = 2$$

Lo que significa que el segmento AD es el doble del tamaño del segmento DB.

Para obtener las coordenadas de cualquier punto R(x,y) que divide al segmento PQ, P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2) en una razón dada se obtiene:



$$r = \frac{\overline{(PR)}_X}{\overline{(RQ)}_X}$$

$$r = \frac{x_1 - x}{x - x_2}$$

Despejando la variable x se obtiene:

$$r(x_2 - x) = x - x_1$$

$$rx_2 - rx = x - x_1$$

$$-x - rx = -x_1 - rx_2$$

$$x(-1-r) = -x_1 - rx_2$$

$$x = \frac{-x_1 - rx_2}{-1-r}$$

$$x = \frac{-(x_1 + rx_2)}{-(1+r)}$$

$$x = \frac{(x_1 + rx_2)}{(1+r)}, \quad r \neq -1$$

de manera análoga,

$r = \frac{\overline{(PR)}_y}{\overline{(RQ)}_y}$, se deduce que:

$$y = \frac{(y_1 + ry_2)}{(1+r)}, \quad r \neq -1$$

Entonces podemos decir que las coordenadas de un punto que divide a un segmento en una razón dada, están dadas por:

$$(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r})$$

Nota: el punto que divide al segmento en dos partes iguales es el punto medio y la razón es igual a uno. Entonces las coordenadas del punto medio del segmento son:

$$PM(\frac{x_1 + 1(x_2)}{1+1}, \frac{y_1 + 1(y_2)}{1+1})$$

$$PM(\frac{x_1 + x_2)}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$$

Ejemplo:

Hallar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos (2,3) y (11,15)

Solución: la razón para el primer punto se trisección es $r = \frac{1}{2}$, porque si dividimos un segmento en tres partes iguales, la distancia del primer extremo, al primer punto de trisección, mide la mitad de la distancia que hay de ese punto al segundo extremo. La razón para el segundo punto de trisección es $r=\frac{2}{1}$, porque la distancia del extremo inicial a ese segundo punto, es el doble de la que hay del segundo punto de trisección al extremo final.

Nota: es importante fijar desde el principio quien es el punto que sirve como extremo inicial, porque en base a ese punto, se tomarán en orden las razones. En nuestro ejemplo, el punto inicial es (2,3)

Sustituyendo en las fórmulas que se dedujeron anteriormente:

Primer punto de trisección:

$$\left(\frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)11}{1+\frac{1}{2}},\frac{3+\frac{1}{2}(15)}{1+\frac{1}{2}}\right)$$

Que es igual a

$$\left(\frac{\frac{15}{2}}{\frac{3}{2}},\frac{\frac{21}{2}}{\frac{3}{2}}\right)=(5,7)$$

Para el segundo punto de trisección:

$$\left(\frac{2+(2)11}{1+2},\frac{3+2(15)}{1+2}\right)$$

Que es igual a

$$\left(\frac{24}{3},\frac{33}{3}\right)=(8,11)$$

Si calculamos la distancia del punto (2,3) al punto (11,15), observamos que efectivamente es el triple que la del (2,3) al (5,7), y que la del (5,7) al (8,11), y que la del (8,11) al (11,15)

Ejercicios de división de un segmento en una razón dada

1. Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos (-2,3) y (6,-3).

Respuesta: Primer punto de trisección $\left(\frac{2}{3},1\right)$, segundo punto de trisección $\left(\frac{10}{3},-1\right)$ el punto medio es $\left(2,0\right)$

2. Los puntos extremos de un segmento son $P_1(2,4)$ y $P_2(8,-4)$. Hallar el punto P(x,y) que divide a este segmento en dos partes tales que $\overline{P_2P}:\overline{PP_1}=-2$

Respuesta: El punto extremo es P(-4,12)

3. Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto (7,8) y su punto medio es (4,3). Hallar el otro extremo.

$PM=\frac{X_1+X_2}{2}$ Ya sabemos que la coordenada el punto medio (PM) es 4, entonces

$$4=\frac{7+X_2}{2}\Rightarrow 8-7=X_2\Rightarrow 1=X_2$$
$$3=\frac{8+Y_2}{2}\Rightarrow 6-8=Y_2\Rightarrow -2=Y_2$$

Respuesta (1,-2)

4. Los extremos de un segmento son los puntos $P_1(7,4)$ y $P_2(-1,-4)$. Hallar la razón $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}$ en el que el punto P(1,-2) divide al segmento.

Respuesta: razón=3

5. Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2,5), (4,2) y (1,1). Hallar las coordenadas de los tres vértices.
Respuesta: Los vértices del triángulos son: (5,6), (3,-2) y (-1,4)

LUGARES GEOMÉTRICOS

Se denomina Lugar Geométrico al conjunto de puntos en el plano que satisfacen una ecuación.

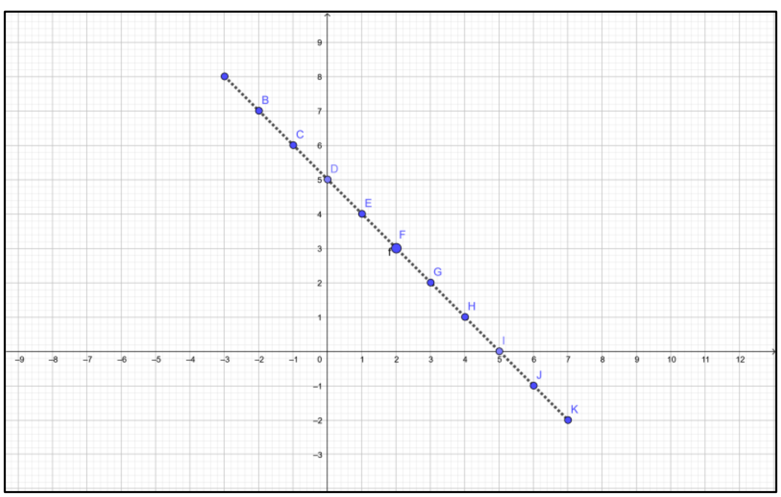
Ejemplo

Obtener el lugar geométrico de los puntos que satisfacen a la ecuación $x+y=5$

Se puede realizar una tabla en la que se den algunos valores de la variable *'x'* y obtener sus respectivas ordenadas *'y'*, las cuales cumplirán que la suma de la abscisa más su ordenada sea siempre 5.

x	y	x+y
-3	8	-3+8=5
-2	7	-2+7=5
-1	6	-1+6=5
0	5	0+5=5
1	4	1+4=5
2	3	2+3=5
3	2	3+2=5

Graficando los puntos se obtiene:

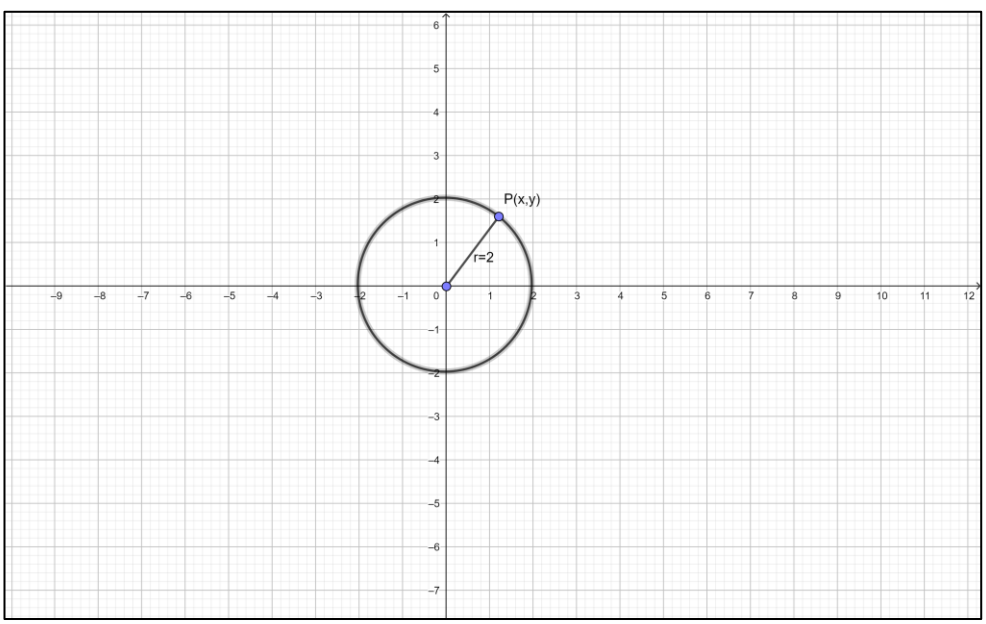


Como se observa en la gráfica anterior sólo están ilustrados los puntos que se utilizaron en la tabla; debido a que las variables ‘x’ y ‘y’ representan a números reales, para representarlos debemos unirlos y extenderlos hacia ambos sentidos ya que la recta que se forma tiene una infinidad de puntos que cumplen con la condición dada.

También podemos encontrar la expresión matemática que describe un lugar geométrico, a partir de ciertas condiciones que ocurran.

Por ejemplo:
Determinar la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que cumplen que su distancia al origen es siempre igual a dos.

Lo que tenemos que encontrar es una ecuación en la que cualquier punto P de coordenadas (x,y) cumpla la condición de que su distancia al origen O(0,0), es siempre igual a dos, como se muestra en la siguiente figura (efectivamente, si un punto pertenece a una circunferencia de radio r=2, su distancia al centro, en este caso el origen, es de dos unidades):



Al utilizar la fórmula para obtener la distancia entre dos puntos y sustituir los datos del problema se obtiene:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{OP} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$2 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$2 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$2^2 = x^2 + y^2$$

Por lo que la ecuación del conjunto de puntos P(x,y) que cumplen que su distancia al origen es siempre igual a dos es:

$$x^2 + y^2 = 4$$

Ejemplo: Determinar la ecuación algebraica de los puntos P(x,y) que equidistan de los puntos (-3,5) y (7,-9).

Solución: como equidistan, la distancia de P, a cada punto es la misma, por lo que se igualan las expresiones:

$$\sqrt{(x-(-3))^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-(-9))^2}$$

Elevando al cuadrado cada término:

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = (x-7)^2 + (y+9)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 18y + 81$$

Transponiendo términos

$$6x + 14x + 9 - 10y + 25 - 49 - 18y - 81 = 0$$

Simplificando:

$$20x - 28y - 96 = 0$$

$$5x - 7y - 24 = 0$$

Ejercicios de lugares geométricos

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(3,5) y B(-4,2) es igual a 30

Respuesta: $x^2+y^2+x-7y+12=0$

2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos A(2,-2) y B(4,1) es igual a 12. (Dos casos)

Primer caso: $4x+6y-21=0$

Segundo caso: $4x+6y+3=0$

3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto P(2,4) es igual a su distancia al eje Y aumentada en 3. Halla la ecuación de dicho lugar geométrico.

Respuesta: $y^2-10x-8y+11=0$

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancia a los puntos A(3,0) y B(-3,0) es igual a 8.

Sea P(x,y) el punto que se mueve en el plano; la distancia del punto P al punto A, está dada mediante la fórmula:

$$d(PA)=\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2}$$

Y la del punto P al punto B, está dada mediante:

$$d(PA)=\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}$$

Como el ejercicio dice que la suma de sus distancias es igual a 8, tenemos:

$$\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}=8$$

La cual la podemos acomodar de la siguiente forma:

$$\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2}=8-\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, y desarrollando los binomios al cuadrado:

$$(\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2})^2=(8-\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2})^2$$

$$9-6x+x^2+y^2=8^2-2(8)\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}+(\sqrt{9+6x+x^2+y^2})^2$$

$$9-6x+x^2+y^2=64-16\sqrt{(-3-x)^2+(0-y)^2}+9+6x+x^2+y^2$$

Transponiendo términos y efectuando las operaciones:

$$-6x-6x-64=-16\sqrt{9+6x+x^2+y^2}$$

$$\frac{-12x-64}{-16}=\sqrt{9+6x+x^2+y^2}$$

$$\frac{3x+16}{4}=\sqrt{9+6x+x^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado nuevamente ambos miembros de la ecuación:

$$(\frac{3x+16}{4})^2=(\sqrt{9+6x+x^2+y^2})^2$$

$$\frac{9x^2+96x+256}{16}=9+6x+x^2+y^2$$

$$9x^2+96x+256=16(9+6x+x^2+y^2)$$

$$9x^2+96x+256=144+96x+16x^2+16y^2$$

$$9x^2+96x+256-144-96x-16x^2-16y^2=0$$

Reduciendo términos:

$$-7x^2-16y^2+112=0$$

$$7x^2+16y^2-112=0$$

UNIDAD 3. LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósito:

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de obtener la ecuación cartesiana de la recta, dados diversos elementos definitorios. Resolverá problemas geométricos en diversos contextos, a fin de que se avance en la comprensión del método analítico.

Aprendizajes:

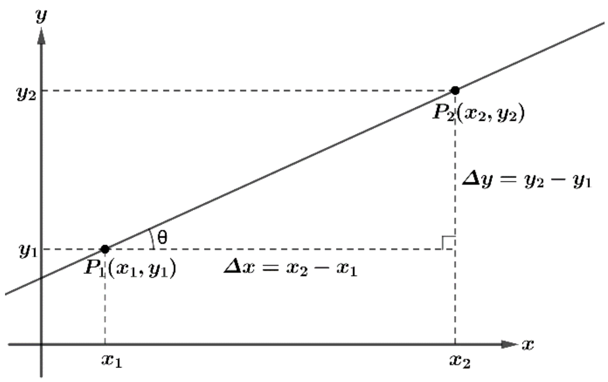
Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Describirá a la recta como un lugar geométrico, identificando los elementos que la definen.
- Entenderá a la pendiente de una recta, como un invariante.
- Obtendrá la ecuación de una recta, dadas dos condiciones.
- Determinará el ángulo que se forma cuando dos rectas se cortan, en términos de sus pendientes.
- Determinará cuando dos rectas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos, a partir de sus ecuaciones.
- Dada la ecuación de una recta el alumno será capaz de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas y/o perpendiculares a ella.
- Identifica y transita en las diferentes formas la ecuación de la recta (ordinaria o canónica, general y simétrica).
- Resolverá problemas de corte euclidiano usando geometría analítica.

LA RECTA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

ECUACIÓN DE LA RECTA

Definición: Es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$ tales que, que si tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a ella $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, el valor de la pendiente m permanece constante.
La pendiente se define como el cociente del incremento en y, Δy, entre el incremento en x, Δx.



Pendiente

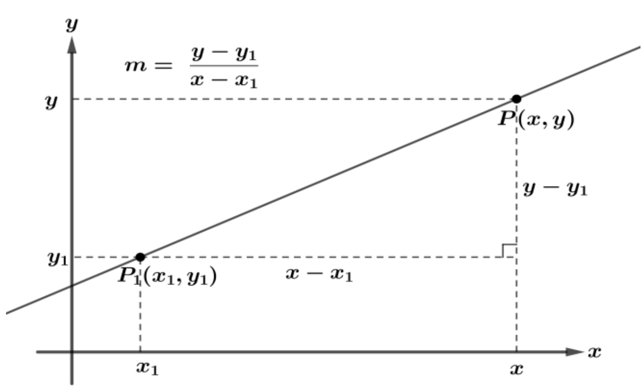
$$m = \tan\theta$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y SU PENDIENTE

Si tenemos un punto $P_1(x_1,y_1)$ que pertenece a una recta y conocemos su pendiente m, podemos determinar la ecuación de la recta sustituyendo en la fórmula de la pendiente las coordenadas de un punto arbitrario $P(x,y)$ sobre la recta, obteniendo:



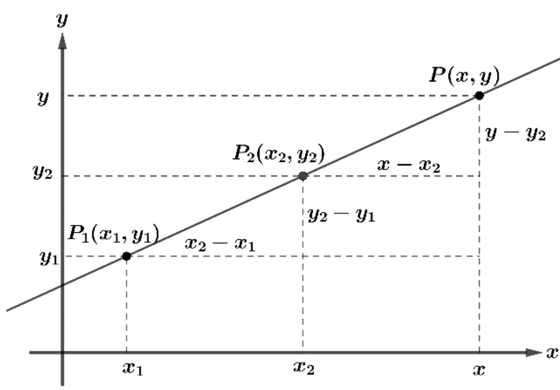
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \; \bullet\bullet\bullet \; (1)$$

Ecuación Punto Pendiente

ECUACIÓN DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS

Cuando conocemos las coordenadas de dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, podemos determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos usando un tercer punto $P(x, y)$ de coordenadas arbitrarias sobre la recta, aplicando la propiedad de que la pendiente entre cualquiera dos puntos de una recta es constante:



$$\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) \;\bullet\bullet\bullet\; (2)$$

Ecuación dados dos puntos

ECUACIÓN DE LA RECTA DADA LA PENDIENTE Y LA ORDENADA AL ORIGEN

El punto por donde la recta cruza el eje de las y se le llama ordenada al origen y se representa por la letra b, este punto tendrá coordenadas $(0, b)$. Si además conocemos la pendiente de la recta, podemos sustituir estos datos en la ecuación de "punto-pendiente" obteniendo la siguiente ecuación:

$$y = m(x - 0) + b$$

$$y = mx + b \;\bullet\bullet\bullet\; (3)$$

Ecuación Ordinaria

EJERCICIOS

1.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3,4)$ y tiene pendiente -2

Tenemos que la forma de la ecuación dados un punto $P_1(x_1, y_1)$ y su pendiente m es:
$y = m(x - x_1) + y_1$

por lo que $x_1 = -3$, $y_1 = 4$ y $m = -2$, sustituyendo nos queda:

$$\begin{aligned} y &= -2(x - (-3)) + 4 \\ &= -2(x+3) + 4 \\ &= -2x - 6 + 4 \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

Así que la ecuación buscada es $y = -2x - 2$, que está en la forma ordinaria $y = mx + b$, donde la pendiente es $m = -2$ y la ordenada al origen es $b = -2$.

2.- Determinar la ecuación que pasa por los puntos $(-5,3)$ y $(6,-4)$

Tenemos que la forma de la ecuación dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2$$

Es indistinto que punto tomemos como P_1 y cuál como P_2. Tomamos $P_1(-5,3)$ y $P_2(6,-4)$, sustituyendo nos queda:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-4-3}{6-(-5)}(x-6)+(-4) \\
&= \frac{-7}{6+5}(x-6)-4 \\
&= \frac{-7}{11}(x-6)-4 \\
&= -\frac{7}{11}x+\frac{42}{11}-4 \\
&= -\frac{7}{11}x+\frac{42}{11}-\frac{44}{11} \\
&= -\frac{7}{11}x-\frac{2}{11}
\end{aligned}
$$

Y la ecuación queda, $y=-\frac{7}{11}x-\frac{2}{11}$, que está en la forma ordinaria $y=mx+b$, con pendiente $m=-\frac{7}{11}$ y ordenada al origen $b=-\frac{2}{11}$.

3.- Determinar la ecuación de la recta con pendiente $m=-3$ y cruza el eje de las y por el punto $(0,5)$.

Tenemos que la ordenada al origen es $b=5$, así que sustituyendo en la ecuación normal obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y &= (-3)x+5 \\
&= -3x+5
\end{aligned}
$$

4.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto *(-3, 4)* y tiene pendiente *-2*

Tenemos que la forma de la ecuación dados un punto $P_0(x_0, y_0)$ y su pendiente m es:

$$y=m(x-x_0)+b$$

por lo que $x_0 = -3$, $y_0 = 4$ y $m = -2$, sustituyendo nos queda:

$$
\begin{aligned}
y &= -2(x-(-3))+4 \\
&= -2(x+3)+4 \\
&= -2x-6+4 \\
&= -2x-2
\end{aligned}
$$

Así que la ecuación buscada es $y = -2x - 2$, que está en la forma ordinaria $y = mx + b$, donde la pendiente es $m=-2$ y la ordenada al origen es $b=-2$.

5.- Determinar la ecuación que pasa por los puntos *(-5, 3)* y *(6, -4)*
Tenemos que la forma de la ecuación dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_0) + y_0$$

Es indistinto que punto tomemos como P_1 y cuál como P_2, para P_0 podemos tomar cualquiera de los dos.
Tomamos $P_1(-3, 2)$, $P_2(6, -4)$ y $P_0(6, -4)$, sustituyendo nos queda:

$$y = \frac{-4-2}{6-(-3)}(x-6)+(-4)$$

$$y = \frac{-6}{6+3}(x-6)-4$$

$$y = \frac{-6}{9}(x-6)-4$$

$$y = -\frac{6}{9}x + \frac{36}{9} - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4 - 4$$

$$y = -\frac{2}{3}x$$

Y la ecuación queda, $y = -\frac{2}{3}x$, que está en la forma ordinaria $y = mx + b$, con pendiente $m=-2/3$ y ordenada al origen $b=0$.

PROBLEMAS PUNTO PENDIENTE

1.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,-3) y con pendiente de 2.

Para resolver este tipo de problema utilizamos la formula $y - y_1 = m(x - x_1)$

SOLUCIÓN

Sustituyendo los valores

$$y-(-3) = 2(x-(-2))$$

Realizando las multiplicaciones correspondientes:

$$(y+3) = 2(x+2)$$

$$y+3 = 2x+4$$

Igualando a cero

$$2x - y + 4 - 3 = 0 \quad ó \qquad -2x + y - 4 + 3 = 0$$

$$2x - y + 1 = 0 \qquad ó \qquad -2x + y - 1 = 0$$

Determina las ecuaciones de las rectas que pasa por los puntos (P) y tiene una pendiente de (m)

a) Pasa por P (2,3); pendiente de 1
b) Pasa por P (1,7); pendiente de -7/2
c) Pasa por P (2,1) pendiente de 3/5
d) Pasa por P (4,3); pendiente de -5
e) Pasa por p (4,5); pendiente de -2/8

EJEMPLO DE ECUACION DE LA RECTA DADOS DOS PUNTOS

1.- Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(4,-1)$.

Solución

Recuerda que si $A(x_1, y_1)$ y $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ se tiene.

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Sustituyendo los valores en la ecuación

$$(y - 4) = \frac{-1 - 4}{4 - (-3)}(x - (-3))$$

Realizaremos las sumas y restas.

$$(y - 4) = \frac{-1 - 4}{4 + 3}(x + 3)$$

$$(y - 4) = \frac{-5}{7}(x + 3)$$

$$7(y - 4) = -5(x + 3)$$

$$7y - 28 = -5x - 15$$

Igualando a cero y agrupando términos.

$$5x + 7y - 28 + 15 = 0$$

$$5x + 7y - 13 = 0$$

EJERCICIOS

Determina la ecuación de la recta que pasa por:

A.-Pasa por los puntos (2,1) y (1,6)
B.-Pasa por los puntos (-1,-2) y (4,3)
C.-Pasa por los puntos (8,8) y (3,4)
D.-Pasa por los puntos (-1,5) y (7,9)
E.-Pasa por los puntos (-1,-3) y (1.3)

PENDIENTE ORDENADA AL ORIGEN.

Dada la ecuación general de la recta $-x+2y+10=0$, conviértela a la forma pendiente ordenada al origen.

Solución:

Despejando a *y* se tiene:

$$2y = x-10$$

$$y = \frac{x-10}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{10}{5}$$

$$y = \frac{1}{2}x - 5$$

Donde $m = \frac{1}{2}$ y $b = -5$

EJERCICIOS

1.-Determina la pendiente y la intersección con el eje *y* (ordenada al origen) de las ecuaciones.

$y = 4$

$4x + 8 = 0$

$3x - 2y = 12$

$2x - 5y = 0$

$4x - 5y = 10$

RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES

Se dice que dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, si sus pendientes m_1 y m_2 son iguales, $m_1 = m_2$

Son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1, es decir, $m_1 \times m_2 = -1$.

También se dice que una es la inversa negativa de la otra, $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Ejemplo

Determine si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

$$x - 2y + 4 = 0$$
$$2x - 4y - 4 = 0$$

Primero expresamos las ecuaciones en su forma ordinaria para poder determinar sus pendientes.

$$\begin{aligned}
x - 2y + 4 &= 0 \\
(-1)(x - 2y + 4) &= (-1)(0) \\
-x + 2y - 4 &= 0 \\
2y &= x + 4 \\
y &= \frac{x+4}{2} \\
y &= \frac{x}{2} + \frac{4}{2} \\
y &= \frac{1}{2}x + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x - 4y - 4 &= 0 \\
(-1)(2x - 4y - 4 &= (-1)(0) \\
-2x + 4y + 4 &= 0 \\
4y &= 2x - 4 \\
y &= \frac{2x-4}{4} \\
y &= \frac{2x}{4} - \frac{4}{4} \\
y &= \frac{1}{2}x - 1
\end{aligned}$$

Observamos que ambas pendientes son $\frac{1}{2}$, así que las rectas son paralelas.

Determine si las siguientes rectas son paralelas o perpendiculares:

$$5x + 2y - 6 = 0$$
$$2x - 5y - 1 = 0$$

Expresamos las ecuaciones en su forma ordinaria para determinar sus pendientes.

$$\begin{aligned}
5x + 2y - 6 &= 0 \\
2y &= -5x + 6 \\
y &= \frac{-5x+6}{2} \\
y &= \frac{-5x}{2} + \frac{6}{2} \\
y &= -\frac{5}{2}x + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x - 5y - 1 &= 0 \\
(-1)(2x - 5y - 1) &= (-1)0 \\
-2x + 5y + 1 &= 0 \\
5y &= 2x - 1 \\
y &= \frac{2x-1}{5} \\
y &= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Verificamos el producto de sus pendientes; $\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=-\frac{10}{10}=-1$, por lo que son perpendiculares.

Encuentre la ecuación de la recta que pase por el punto de coordenadas $(2,1)$ y que sea perpendicular a $x+2y-4=0$
Primero pasamos la ecuación a su forma normal para determinar su pendiente:

$$x+2y-4=0$$
$$2y=-x+4$$
$$y=\frac{-x+4}{2}$$
$$y=-\frac{x}{2}+\frac{4}{2}$$
$$y=-\frac{1}{2}x+2$$

Vemos que su pendiente es $-\frac{1}{2}$, por lo que la pendiente de una recta perpendicular a ésta deberá ser su inverso negativo, es decir, $-\left(-\frac{2}{1}\right)=2$. Ahora determinamos la ecuación de la recta pedida usando la forma punto pendiente, ya que queremos que pase por el punto $(2,1)$ y que tenga pendiente $m=2$

$$y=m(x-x_1)+y_1$$
$$y=2(x-2)+1$$
$$y=2x-4+1$$
$$y=2x-3$$

Otra manera de encontrar las ecuaciones de rectas paralelas o perpendiculares es a través de la ecuación general de la recta de con el siguiente:

TEOREMA

Las rectas:

$$Ax+By+C=0$$

$$Ax+By+C_1=0 \qquad \text{Son paralelas}$$

Las rectas:

$$Ax + By + C = 0$$
$$Bx - Ay + C_1 = 0 \quad \text{Son perpendiculares}$$

Se puede utilizar este teorema para obtener rectas paralelas o perpendiculares a partir de una ecuación conocida.
Por ejemplo: para obtener:

- Para obtener una recta paralela a otra cuya ecuación se conoce, se consideran los mismos coeficientes de *x* y *y,* y se cambia el valor del termino independiente.
- Para obtener una recta perpendicular a otra cuya ecuación se conoce, se intercambian los coeficientes de *x* y *y*, uno de ellos con signo contrario y se cambia el valor del termino independiente.

Ejemplo 1:

Dada la recta $6x + 5y - 3 = 0$ obtener:

a) La ecuación de una recta paralela que pase por el punto $A(3,5)$
b) La ecuación de una recta perpendicular que pase por el punto $A(3,5)$

a) Solución:
Aplicando el teorema de las rectas paralelas se observa que la función debe ser de la forma:
$6x + 5y + \_\_\_ = 0$
en donde únicamente hace falta obtener el termino independiente, para obtenerlo se sustituyen los valores de *x* y *y* por el de las coordenadas del punto dado y finalmente el termino independiente que hace falta es el valor que es necesario agregar para que se cumpla la igualdad con cero.

$$6(3) + 5(5) + \_\_\_ = 0$$
$$18 + 25 + \_\_\_ = 0$$
$$43 + (-43) = 0$$

Por lo tanto la recta paralela es $6x + 5y - 43 = 0$

b) Solución:

Aplicando el teorema de las rectas perpendiculares se observa que la función debe ser de la forma:
$5x-6y+\_\_\_=0$
en donde únicamente hace falta obtener el termino independiente, para obtenerlo se sustituyen los valores de *x* y *y* por el de las coordenadas del punto dado y finalmente el termino independiente que hace falta es el valor que es necesario agregar para que se cumpla la igualdad con cero.

$$5(3)-6(5)+\_\_\_=0$$
$$15-30+\_\_\_=0$$
$$-15+(15)=0$$

Por lo tanto la recta perpendicular es $5x-6y+15=0$

Ejemplo 2:

Dada la recta $7x-9y+15=0$ obtener:

a) La ecuación de una recta paralela a esta que pasa por $A(2,3)$
b) La ecuación de una recta perpendicular a esta que pasa por $A(2,3)$

a) Solución:

Aplicando el teorema de las rectas paralelas se observa que la función debe ser de la forma:
$7x-9y+\_\_\_=0$
en donde únicamente hace falta obtener el termino independiente, para obtenerlo se sustituyen los valores de *x* y *y* por el de las coordenadas del punto dado y finalmente el termino independiente que hace falta es el valor que es necesario agregar para que se cumpla la igualdad con cero.

$$7(2)-9(3)+\_\_\_=0$$
$$14-27+\_\_\_=0$$
$$-13+(13)=0$$

Por lo tanto la recta paralela es $7x-9y+13=0$

b) Solución:

Aplicando el teorema de las rectas perpendiculares se observa que la función debe ser de la forma:

$-9x-7y+\_\_\_=0$

en donde únicamente hace falta obtener el termino independiente, para obtenerlo se sustituyen los valores de *x* y *y* por el de las coordenadas del punto dado y finalmente el termino independiente que hace falta es el valor que es necesario agregar para que se cumpla la igualdad con cero.

$$-9(2)-7(3)+\_\_\_=0$$
$$-18-21+\_\_\_=0$$
$$-39+(39)=0$$

Por lo tanto la recta perpendicular es $-9x-7y+39=0$

Ejercicios

1.- Dada la recta $5x+9y-21=0$ obtener:

a) La ecuación de una recta paralela a esta que pase por el punto $A(2,5)$

b) La ecuación de una recta perpendicular a esta que pase por el punto $A(2,5)$

2.- Dada la recta $7x-9y+15=0$ obtener:

a) La ecuación de una recta paralela a esta que pase por el punto $B(-4,1)$

b) La ecuación de una recta perpendicular a esta que pase por el punto $B(-4,1)$

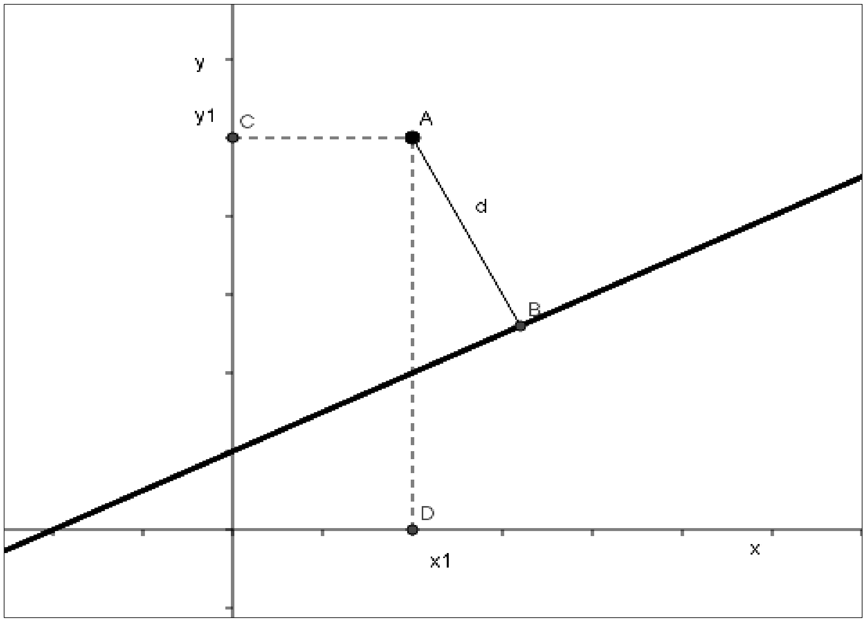
3.- Dada la recta $-11x+2y-6=0$ obtener:

a) La ecuación de una recta paralela a esta que pase por el punto $C(1,3)$

b) La ecuación de una recta perpendicular a esta que pase por el punto $C(1,3)$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Supongamos que se tiene la recta *l* y un punto $A(x_1, y_1)$ fuera de la recta.



La distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta "*l*" que tiene como ecuación $Ax + By + C = 0$ se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que llega al punto, y se calcula con la siguiente expresión:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Nota: recuerda que las líneas paralelas en la expresión representa el valor absoluto de la misma, por lo tanto siempre se considerara como positivo el resultado obtenido.

Ejemplo 1:

Obtener la distancia de la recta $4x+3y-1=0$ al punto $A(3,0)$
Solución:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d=\left|\frac{4(3)+3(0)-1}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|=\left|\frac{12-1}{\sqrt{16+9}}\right|=\left|\frac{11}{\sqrt{25}}\right|=\frac{11}{5}$$

Por lo tanto, la distancia del punto a la recta es 2.2

Ejemplo 2:
Obtener la distancia de la recta $x-2y+3=0$ al punto $B(-1,5)$

Solución:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d=\left|\frac{1(-1)-2(5)+3}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\right|=\left|\frac{-1-10+3}{\sqrt{1+4}}\right|=\left|\frac{-8}{\sqrt{5}}\right|=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, la distancia del punto a la recta es 3.58 aproximadamente.

Ejemplo 3:

Obtener la distancia entre las rectas paralelas:

$$x+2y-3=0.........(1)$$
$$x+2y+5=0.........(2)$$

Solución:
Como se puede ver, las dos rectas son paralelas, entonces se necesita encontrar un punto de una de ellas y con la ecuación de la otra se podrá determinar la distancia entre ellas.

De la ecuación (1) despejando a *y* se tiene:

$$y=\frac{-x+3}{2}$$

Ahora determinamos un punto de la recta, asignando un valor cualquiera a x y obteniendo el correspondiente valor de y:

Si x = 5 entonces $y = \frac{-(5)+3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Obteniendo el punto P (5,-1), entonces, con este punto y la ecuación (2) determinaremos la distancia del punto a la recta, asi:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{1(5) + 2(-1) + 5}{\sqrt{1^2 + (2)^2}} \right| = \left| \frac{5 - 2 + 5}{\sqrt{1+4}} \right| = \left| \frac{8}{\sqrt{5}} \right| = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Por lo que la distancia del punto a la recta es 3.58 aproximadamente

Encuentra la distancia de la recta al punto dado en cada uno de los siguientes incisos:

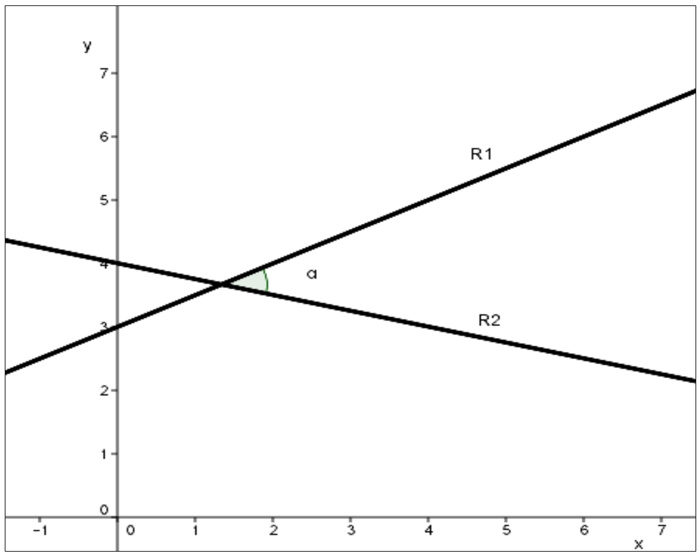
a) $-2x + 4y - 10 = 0$ al punto $M(0,-1)$
b) $8x - 6y - 20 = 0$ al punto $N(1,10)$
c) $-5x + 3y + 5 = 0$ al punto $O(3,2)$

Obtén la distancia que separa las siguientes parejas de rectas paralelas:

a) $-2x + 4y - 10 = 0$ y $-2x + 4y - 4 = 0$
b) $3x + y + 9 = 0$ y $3x + y - 1 = 0$

ANGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN.

Conociendo las pendientes de dos rectas, se sabe si son o no son paralelas entre si y, si no son paralelas, necesariamente se cortan. En este caso, si sus pendientes son reciprocas y de signo contrario, son perpendiculares, es decir forman al cortarse un ángulo de 90 grados.
Cuando se cortan dos rectas que no son perpendiculares, se puede determinar el ángulo que forman si se conocen sus pendientes. Podemos llamar R1 y R2 a las rectas y α al ángulo que forma al cortarse:



Ahora bien, para determinar el valor de α se calculan las pendientes de las dos rectas, las cuales son respectivamente m_1 y m_2.
La fórmula que nos permite conocer la tangente del ángulo que forman dos rectas al cortarse es:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Ejemplo:
Determinar el ángulo formado entre las rectas determinadas por los puntos:

R_1 A(1,5), B(7,3)
R_2 C(2,1), D(6,4)

Lo primero que necesitamos es realizar el cálculo de las pendientes de las rectas, por lo tanto tenemos:

$$m_{CD} = \frac{4-1}{6-2}$$

$$m_{CD} = \frac{3}{4}$$

$$m_{AB} = \frac{3-5}{7-1}$$

$$m_{AB} = \frac{-2}{6}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{3}$$

Una vez determinadas las pendientes, establecemos $m_1 = m_{AB,}$ y $m_2 = m_{CD}$, y procedemos a sustituir en la formula, obteniendo:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{1-\frac{3}{12}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{13}{12}}{\frac{9}{12}} = \frac{13}{9}$$

$$Despejando$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{13}{9}\right)$$

$$\alpha = 55.30^{\circ}$$

Realiza los siguientes ejercicios.

1.- Obtener el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos A(1,1) y B(4,7) con la recta que pasa por los puntos C(-3,1) y D(-4,2)

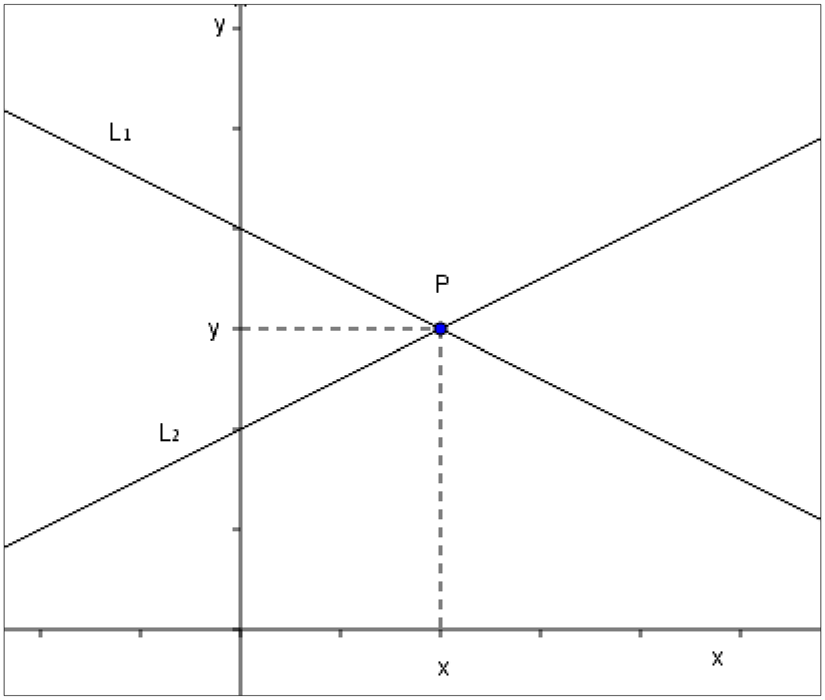
2.- Obtener el ángulo que forma la recta 2x+3y-1= 0 con la recta 3x-5y+4 = 0

3.- Determinar el ángulo de intersección de la recta que pasa por los puntos A(4,2) y B(-1,4) con la recta que pasa por los puntos C(-1,4) y D(1,-2)

4.- Obtener el ángulo de intersección entre la recta 2x+y-4=0 y la recta x -2y+6=0

INTERSECCION DE 2 RECTAS QUE SE CORTAN.

Sean las rectas L_1 y L_2 las rectas que se muestran en la gráfica siguiente:



El punto de intersección $P(x, y)$ esta sobre las rectas L_1 y L_2. Para obtener el punto de intersección de manera algebraica, se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales que representa a las rectas.

Ejemplo 1:
Obtener el punto de intersección de las rectas $x+y-4=0$ y $x-y-2=0$

Solución:

Se resuelve el sistema de ecuaciones generado por cualquiera de los métodos vistos en la unidad 1, para este caso utilizaremos el método de sustitución.

$$x+y=4.........(1)$$
$$x-y=2.........(2)$$

Se despeja x de la ecuación (1)

$$x=4-y.......(3)$$

Se sustituye en la ecuación (2), teniendo:

$$(4-y)-y=2$$
$$(4-2y=2$$
$$-2y=2-4$$
$$-2y=-2$$
$$y=\frac{-2}{-2}$$
$$y=1$$

Una vez determinado el valor de y lo sustituimos en (3) y tenemos:

$$x=4-y$$
$$x=4-1$$
$$x=3$$

Por lo que el punto de intersección de las rectas es el punto (3,1).

Ejemplo 2:

Obtener el punto de intersección de las rectas $3x-y-3=0$ y $-4x+3y-1=0$

Solución:

Se resuelve el sistema de ecuaciones generado por cualquiera de los métodos vistos en la unidad 1, para este caso utilizaremos el método de sustitución.

$3x-y=3.........(1)$

$-4x+3y=1.........(2)$

Se despeja y de la ecuación (1)

$y=-3+3x.......(3)$

Se sustituye en la ecuación (2), teniendo:

$$-4x+3(-3+3x)=1$$
$$-4x-9+9x=1$$
$$5x=10$$
$$x=\frac{10}{5}$$
$$x=2$$

Una vez determinado el valor de x lo sustituimos en (3) y tenemos:

$$y=-3+3(2)$$
$$y=-3+6$$
$$y=3$$

Por lo que el punto de intersección de las rectas es el punto (2,3).

Ejercicios.

Obtener el punto de intersección entre los siguientes pares de rectas.

1.- $\begin{array}{l} 5x-2y=17 \\ 8x+5y=19 \end{array}$

2.- $\begin{array}{l} 4x-3y=5 \\ 3x+5y=11 \end{array}$

3.- $\begin{array}{l} 8x+3y=13 \\ 3x+2y=11 \end{array}$

4.- $\begin{array}{l} x+y=2 \\ 4x+4y=8 \end{array}$

5.- $\begin{array}{l} 8x-2y=10 \\ 4x-y=-5 \end{array}$

PUNTOS Y RECTAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

Mediatriz: Recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

Bisectriz. Recta que divide a un ángulo exactamente en dos partes iguales.

Mediana: Recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto en un triángulo.

Altura: Recta perpendicular que parte del vértice al lado opuesto en un triángulo.

Circuncentro: punto de intersección de las tres mediatrices en un triángulo.

Incentro: punto de intersección de las tres bisectrices en un triángulo.

Ortocentro. Punto de intersección de las tres alturas en un triángulo.

Baricentro: punto de intersección de las tres medianas en un triángulo.

Los puntos A(-1,2), B(1,4) y C(3,1) son vértices de un triángulo, obtener:

a) La ecuación de cada uno de sus lados.
b) Obtener los puntos medios de cada lado.
c) Las pendientes de cada lado
d) Las ecuaciones de las mediatrices de cada lado.
e) Obtener las coordenadas del circuncentro.
f) Obtener las ecuaciones de las medianas de cada lado.
g) Obtener las coordenadas del baricentro.
h) Obtener las ecuaciones de las alturas de cada vértice
i) Obtener las coordenadas del ortocentro.
j) Traza la gráfica del triángulo y traza las rectas notables de colores diferentes e identifica los puntos notables obtenidos.

UNIDAD 4. LA PARÁBOLA Y SU ECUACIÓN CARTESIANA

Propósito:

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de obtener la ecuación de una parábola a partir de su definición (foco y directriz) o de elementos necesarios y suficientes. Identificará sus elementos a partir de la ecuación. Resolverá problemas que involucren a la parábola y sus propiedades.

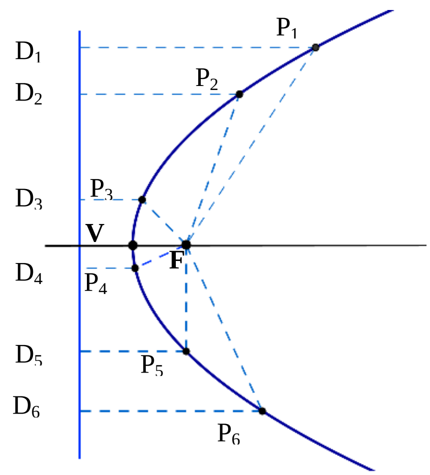
Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Identificará los elementos que definen la parábola.
- Reconocerá la simetría de esta curva.
- Obtendrá por inducción la definición de la parábola como lugar geométrico.
- Deducirá la ecuación de la parábola con vértice en el origen y fuera de él.
- Entenderá que un punto pertenece a una parábola si y sólo si, sus coordenadas satisfacen la ecuación correspondiente.
- Determinará el vértice, foco, directriz, el eje de simetría y el lado recto de la parábola, a partir de su ecuación cartesiana.
- Graficará parábolas dadas sus ecuaciones y viceversa.
- Transformará la ecuación general a la ordinaria para encontrar sus elementos.
- Resuelve problemas que involucren la intersección de una recta con una parábola y entre parábolas
- Resolverá problemas de aplicación
- Valorará su conocimiento sobre parábola

LA PARÁBOLA

Es el lugar geométrico formado por todos los puntos en el plano cuya distancia a un punto fijo (***foco***) es igual a su distancia a una recta fija (***directriz***). La siguiente gráfica nos muestra el concepto de parábola más claramente:



$D_1P_1 = F\ P_1$

$D_2P_2 = F\ P_2$

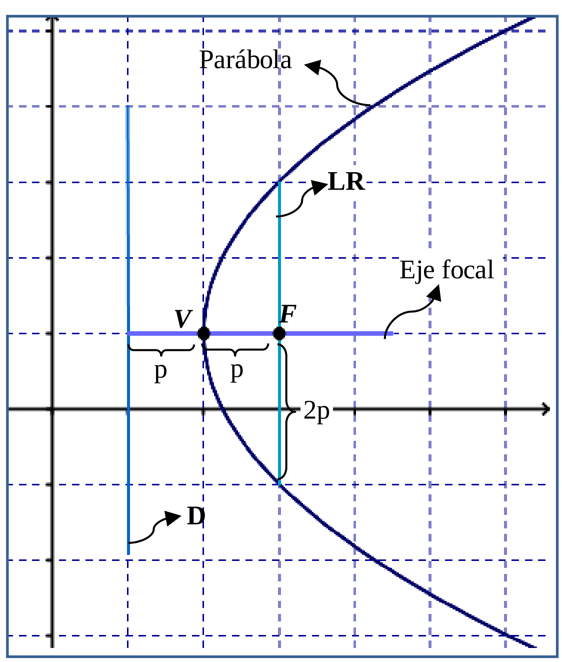
$D_3P_3 = F\ P_3$

$D_4P_4 = F\ P_4$

$D_5P_5 = F\ P_5$

$D_6P_6 = F\ P_6$

Los elementos de la parábola son los siguientes:



V = Vértice (h, k)

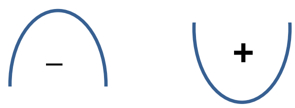
F = Foco

LR = Lado Recto (4p)

D = Directriz

p = Distancia del vértice a la directriz o la distancia del vértice al foco (parámetro)

- ✓ Si el eje focal es paralelo al eje “y” (***parábola vertical***), el foco se encuentra arriba o abajo del vértice, la ecuación es:



Forma ordinaria:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$

Forma general:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

El doble signo $(\pm)$ de $4p$ en la forma ordinaria, nos indica hacia dónde “abre” la parábola, si “abre” hacia arriba es positivo y si “abre” hacia abajo es negativo.

- ✓ Si el eje focal es paralelo al eje “x” (***parábola horizontal***), el foco se encuentra a la derecha o a la izquierda del vértice, la ecuación es:

Forma ordinaria:

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$

Forma general:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

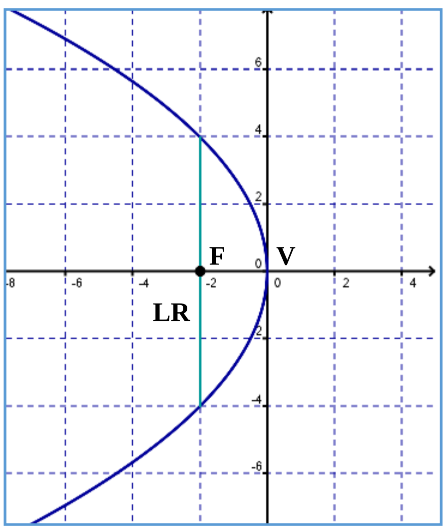
El doble signo $(\pm)$ de $4p$ de la forma ordinaria, nos indica hacia dónde “abre” la parábola, si “abre” hacia la derecha es positivo y si “abre” hacia la izquierda es negativo.

La longitud del lado recto es: ***LR = 4p***

MODELO ALGEBRAICO DE LA PARÁBOLA EN SU FORMA ORDINARIA Y GENERAL

EJEMPLOS

1.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(-2,0)$ y vértice en el origen, elaborar su gráfica.



Se ubica el vértice y el foco en la gráfica, se observa que la parábola abre hacia la izquierda por lo que es una parábola horizontal negativa, utilizando la forma ordinaria correspondiente quedaría:

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Las coordenadas del vértice $V(0,0)$ dan el valor de $h=0$ y $k=0$. El valor de "p" se obtiene con la distancia del vértice al foco, por lo que $p=2$.

El lado recto es: $LR = 4p$

$LR = 4(2)$

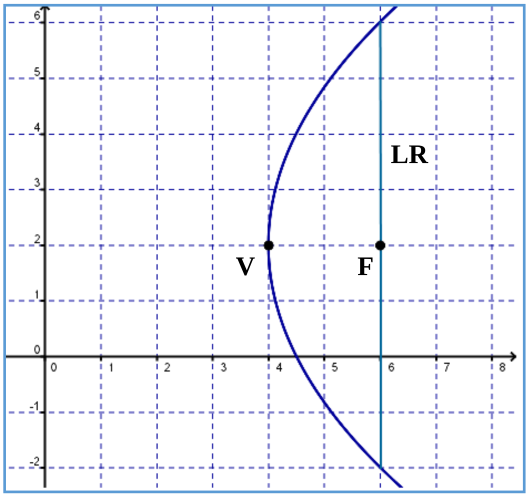
$LR = 8$

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta: $(y-0)^2 = -4(2)(x-0)$

La forma ordinaria es: $y^2 = -8x$

Acomodando los términos del lado izquierdo para tener la forma general: $y^2 + 8x = 0$

2.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(6,2)$ y vértice $V(4,2)$ y elaborar su gráfica.



Se ubica el vértice y el foco en la gráfica, se observa que la parábola abre hacia la derecha por lo que es una parábola horizontal positiva, utilizando la forma ordinaria correspondiente quedaría:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

Las coordenadas del vértice $V(4,2)$ dan el valor de $h=4$ y $k=2$. El valor de "p" se obtiene con la distancia del vértice al foco, por lo que $p=2$.

El lado recto es: $LR = 4p$

$LR = 4(2)$

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta: $(y-2)^2 = 4(2)(x-4)$

La forma ordinaria es: $(y-2)^2 = 8(x-4)$

Desarrollando operaciones para llegar a la forma general: $y^2 - 4y + 4 = 8x - 32$

$$y^2 - 4y + 4 - 8x + 32 = 0$$

Simplificando y acomodando los términos la forma general queda así:

$$y^2 - 8x - 4y + 36 = 0$$

EJERCICIOS

1.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(-3,5)$ y vértice $V(-5,5)$ elaborando su gráfica.

$$y^2 - 8x - 10y - 15 = 0$$

2.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(3,3)$ y vértice $V(3,5)$ elaborando su gráfica.

$$x^2 - 6x + 8y - 31 = 0$$

3.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(-1,1)$ y vértice $V(-4,1)$ elaborando su gráfica.

$$y^2 - 12x - 2y - 47 = 0$$

4.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(-2,4)$ y vértice $V(-2,2)$ elaborando su gráfica.

$$x^2+4x-8y+20=0$$

5.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(-2,3)$ y vértice $V(-2,1)$ elaborando su gráfica.

$$x^2+4x-8y+12=0$$

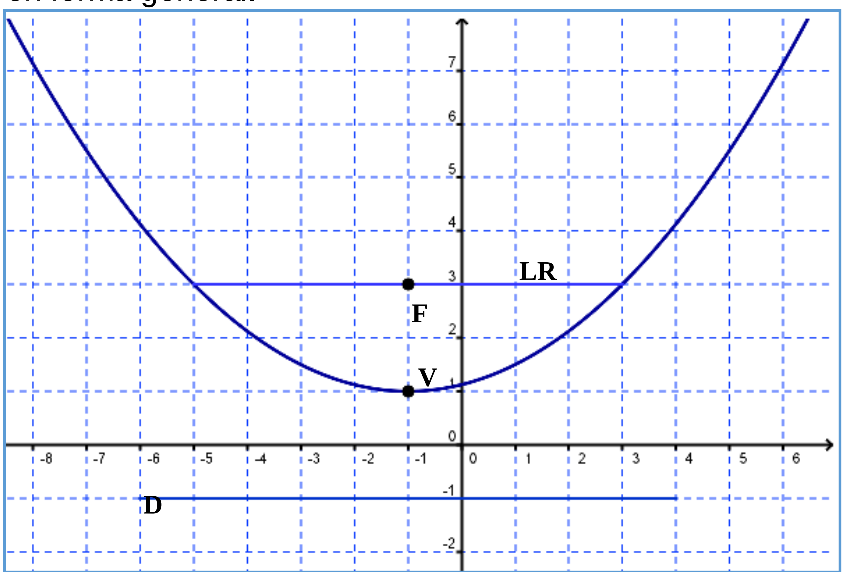
6.- Obtener la ecuación ordinaria y general de la parábola si se tiene como foco $F(5,-3)$ y vértice $V(5,2)$ elaborando su gráfica.

$$x^2-10x+20y-15=0$$

MODELO ALGEBRAICO DE LA PARÁBOLA DADOS LA DIRECTRIZ Y EL VÉRTICE O EL FOCO

EJEMPLOS

1.- Dado el foco $F(-1,3)$ y la directriz $y=-1$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.



Se ubica el foco y la directriz en la gráfica, entre el foco y la directriz, a la mitad, se localiza el vértice, se observa que la parábola abre hacia arriba por lo que es una parábola vertical positiva, utilizando la forma ordinaria correspondiente quedaría:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Las coordenadas del vértice $V(-1,1)$ dan el valor de $h=-1$ y $k=1$. El valor de "p" se obtiene con la distancia del vértice a la directriz o del vértice al foco, por lo que $p=2$.

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta: $\left[x-(-)1\right]^2 = 4(2)(y-1)$

La forma ordinaria es: $(x+1)^2 = 8(y-1)$

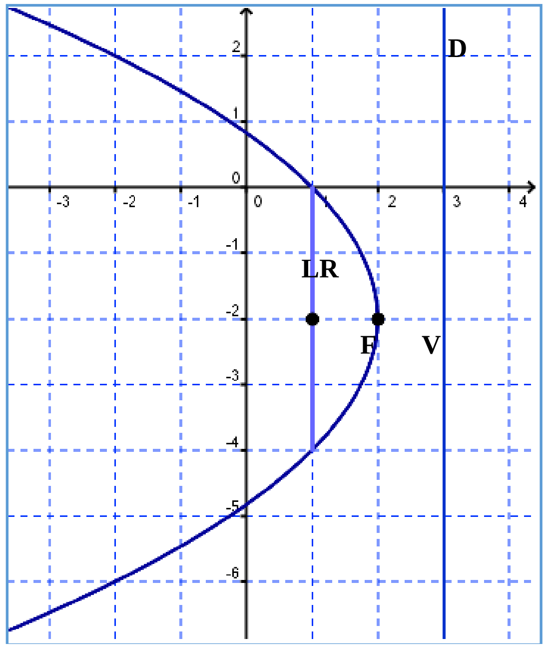
Desarrollando operaciones para llegar a la forma general: $x^2+2x+1=8y-8$

$$x^2+2x+1-8y+8=0$$

Simplificando y acomodando los términos la forma general queda así:

$$x^2+2x-8y+9=0$$

2.- Dado el vértice $V(2,-2)$ y la directriz $x=3$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.



Se ubica el vértice y la directriz en la gráfica, se observa que la parábola abre hacia la izquierda por lo que es una parábola horizontal negativa, utilizando la forma ordinaria correspondiente quedaría:

$(y-k)^2=-4p(x-h)$

Las coordenadas del vértice $V(2,-2)$ dan el valor de $h=2$ y k = -2. El valor de "p" se obtiene con la distancia del vértice a la directriz, por lo que $p=1$. Con esta distancia ubicamos el foco hacia la izquierda del vértice.

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta: $[y-(-2)]^2=-4(1)(x-2)$

La forma ordinaria es: $(y+2)^2=-4(x-2)$

Desarrollando operaciones para llegar a la forma general:

$$y^2-4y+4=-4x+8$$

$$y^2-4y+4+4x-8=0$$

Simplificando y acomodando los términos la forma general queda así:

$$y^2+4x-4y-4=0$$

EJERCICIOS

1.- Dado el $F(3,2)$ y la directriz $x=-1$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$y^2-8x-4y+12=0$$

2.- Dado el foco $F(-3,-4)$ y la directriz $y=0$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$x^2+6x+8y+25=0$$

3.- Dado el vértice $V(-2,1)$ y la directriz $x=2$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$y^2+16x-2y+33=0$$

4.- Dado el vértice $V(5,-4)$ y la directriz $y=-5$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$x^2-10x-4y+9=0$$

5.- Dado el foco $F(1,-1)$ y la directriz $y=3$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$x^2-2x+8y-7=0$$

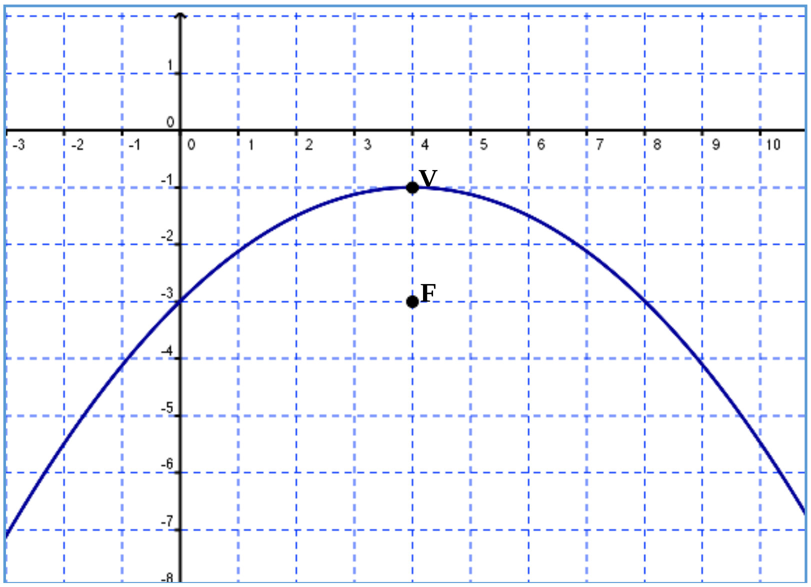
6.- Dado el vértice $V(-1,-2)$ y la directriz $x=-3$, elaborar la gráfica y encontrar la ecuación en forma general.

$$y^2-8x+4y-4=0$$

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA EN FORMA GENERAL A PARTIR DE SU GRÁFICA

EJERCICIOS

1.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



Las coordenadas del vértice son $V(4,-1)$, por lo que $h=4$ y $k=-1$
Como la parábola "abre" hacia abajo es negativa.

El valor de "p" es de 2: $p=2$

Con esta información se puede ver qué forma se utiliza: $(x-h)^2=-4p(y-k)$

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta: $(x-4)^2=-4(2)\left(y-(-1)\right)$

La forma ordinaria es:

$$(x-4)^2=-8(y+1)$$

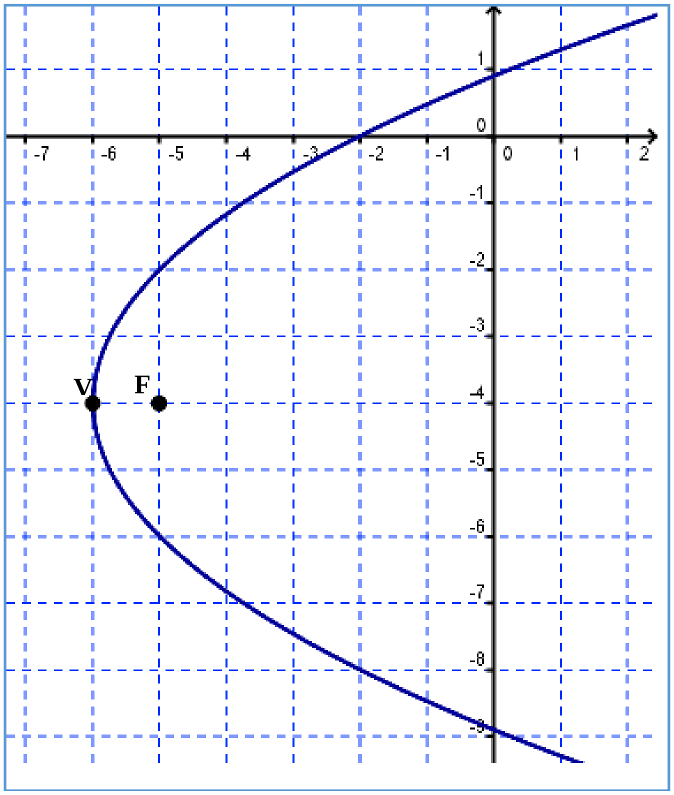
Desarrollando operaciones para llegar a la forma general:

$$x^2-8x+16=-8y-8$$

$$x^2-8x+16+8y+8=0$$

Simplificando y acomodando los términos la forma general queda así:

2.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



Las coordenadas del vértice son $"x^2"$ $V(-6,-4)$, por lo que $h=-6$ y $k=-4$

Como la parábola "abre" hacia la derecha es positiva

El valor de "p" es de 1: $p=1$

Con esta información se puede ver qué forma se utiliza: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Sustituyendo estos datos en la forma ordinaria resulta:

$$\left[y-(-4)\right]^2 = 4(1)\left[x-(-6)\right]$$

La forma ordinaria es:

$$(y+4)^2 = 4(x+6)$$

Desarrollando operaciones para llegar a la forma general:

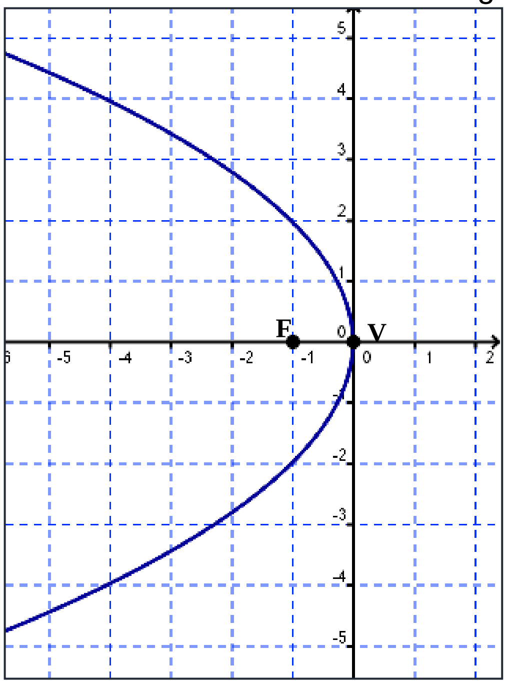
$$y^2+8y+16 = 4x+24$$

$$y^2+8y+16-4x-24 = 0$$

Simplificando y acomodando los términos la forma general queda así:

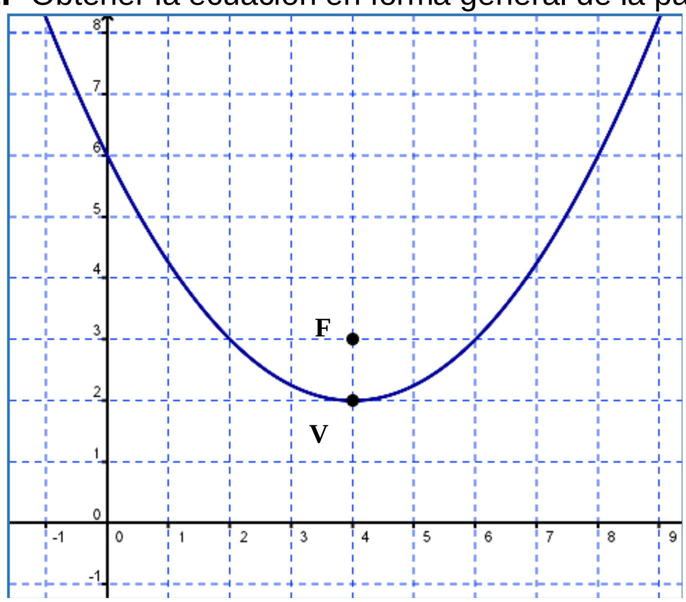
EJERCICIOS

1.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



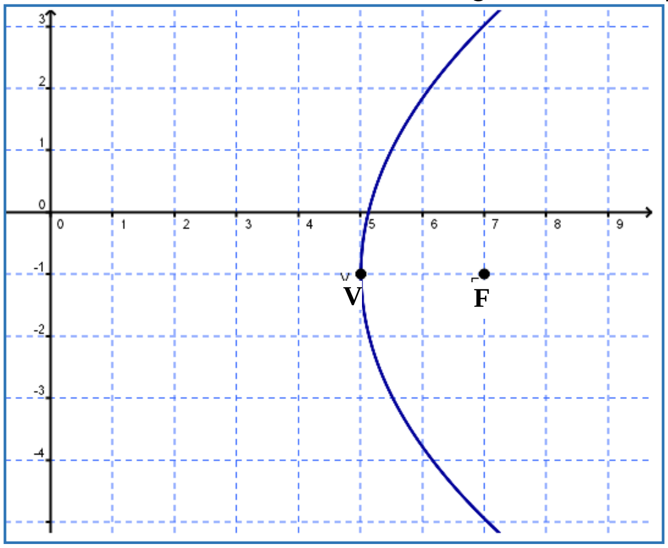
$y^2 + 4x = 0$

2.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



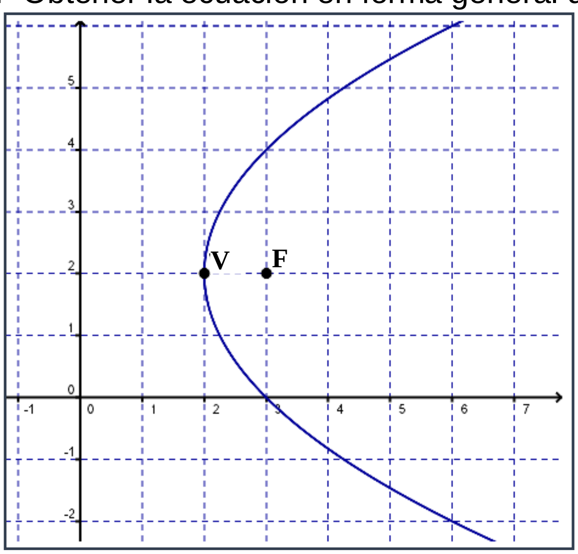
$x^2 - 8x - 4y + 24 = 0$

3.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



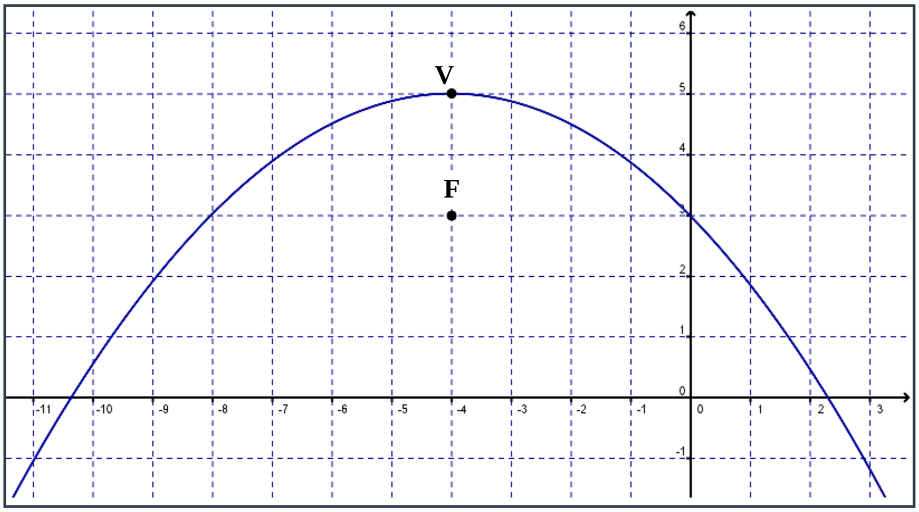
$$y^2 - 8x + 2y + 41 = 0$$

4.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



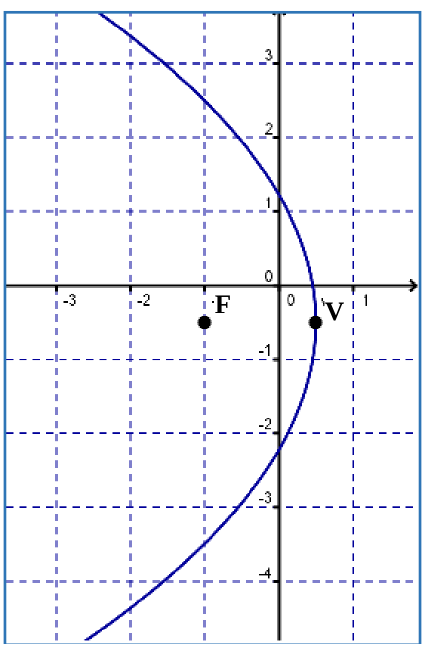
$$y^2 - 4x - 4y + 12 = 0$$

5.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



$$x^2 + 8x + 8y - 24 = 0$$

6.- Obtener la ecuación en forma general de la parábola



$$y^2 + 6x + y - \frac{11}{4} = 0$$

GRÁFICA DE LA PARÁBOLA A PARTIR DE SU ECUACIÓN GENERAL

Para obtener la gráfica a partir de su forma general, primero tenemos que pasarla a la forma ordinaria; completando el trinomio cuadrado perfecto (TCP), y graficando para encontrar las coordenadas del vértice, del foco, el lado recto y la ecuación de la directriz.

EJERCICIOS

1.- Dada la ecuación de la parábola $x^2-2x+8y+17=0$, determinar:

a) Vértice

b) Foco

c) Lado Recto

d) Directriz

e) Gráfica

Dejando de lado izquierdo el término cuadrático, en este
Caso "x^2" con "$-2x$" y de lado derecho los otros dos términos: $x^2-2x=-8y-17$

Hay que completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP): $x^2-2x+1=-8y-17+1$

Para completar el TCP se divide el coeficiente de "x" *entre* $2:\frac{2}{2}$, *el resultado se eleva al cuadrado* "$1^2=1$", *él* "1" *se agrega en ambos lados de la igualdad para mantener precisamente la igualdad.*

(Se recomienda revisar cómo completar el TCP en cualquier libro de álgebra)

Factorizando se tiene:

$$(x-1)^2=-8y-16$$

$$(x-1)^2=-8(y+2)$$

El lado recto es $LR=8$, para obtener el valor de "p":

$$LR=4p$$

$$8=4p$$

$$\frac{8}{4}=p \quad \therefore p=2$$

Cuando ya se tiene la ecuación en forma ordinaria, se obtiene
el vértice, $h=1,\quad k=-2$:

$$V(1,-2)$$

La ecuación empieza con $(x-1)^2$, es una parábola vertical
el signo “negativo” del 8 nos indica que “abre” hacia abajo.

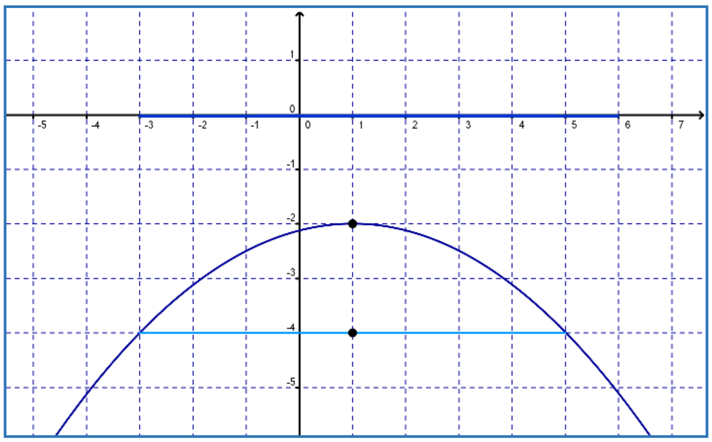
Por lo tanto, los resultados obtenidos se pueden mostrar de la siguiente manera:

a) $V(1,-2)$

b) $F(1,-4)$

c) $LR=8$

d) $D: y=0$



2.- Dada la ecuación de la parábola $y^2-12x+6y-3=0$, determinar:

a) Vértice

b) Foco

c) Lado Recto

d) Directriz

e) Gráfica

Dejando de lado izquierdo el término cuadrático, en este caso $"y^2"$ con $"6y"$ y de lado derecho los otros dos términos:

$$y^2+6y=12x+3$$

Hay que completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP): $y^2+6y+9=12x+3+9$

Para completar el TCP se divide coeficiente de $"x"$ *entre* $2:\frac{6}{2}$, *el resultado se eleva al cuadrado* $"3^2=9"$*, él* $"9"$ *se agrega en ambos lados de la igualdad.*

Simplificando:

$$(y+3)^2=12x+12$$

Factorizando del lado derecho al $"12"$:

$$(y+3)^2=12(x+1)$$

El lado recto es $LR=12$, para obtener el valor de $"p"$:

$$LR=4p$$

$$12=4p$$

$$\frac{12}{4}=p\therefore p=3$$

Cuando ya se tiene la ecuación en forma ordinaria, se puede obtener el vértice y el lado recto, $h=-1$, $k=-3$*:* $V(-1,-3)$

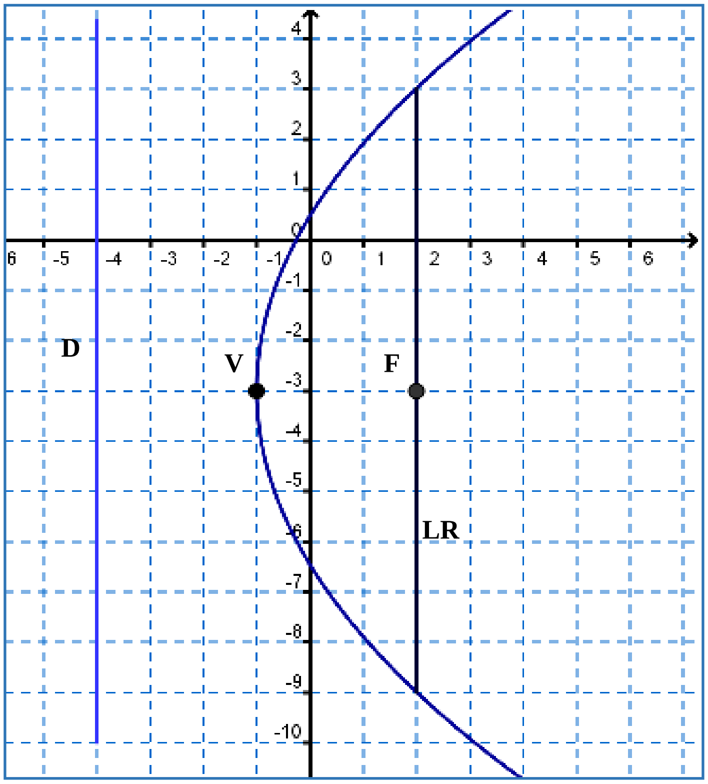
La ecuación empieza con $"(y+3)^2"$, es una parábola horizontal,
el signo "positivo" del 12 nos indica que "abre" hacia la derecha:

a) $V(-1,-3)$

b) $F(2,-3)$

c) $LR=12$

d) $D:x=-4$



EJERCICIOS

1.- Dada la ecuación de la parábola $x^2 - 6x + 8y - 7 = 0$, determinar:

a) Vértice $(3, 2)$

b) Foco $(3, 0)$

c) Lado Recto 8

d) Directriz $y = 4$

e) Gráfica

2.- Dada la ecuación de la parábola $y^2 + 12x + 8y + 4 = 0$, determinar:

a) Vértice $(1, -4)$

b) Foco $(-2, -4)$

c) Lado Recto $= 12$

d) Directriz $x = 4$

e) Gráfica

3.- Dada la ecuación de la parábola $y^2-4x+2y-7=0$, determinar:

a) Vértice $(-2,-1)$

b) Foco $(-1,-1)$

c) Lado Recto $=4$

d) Directriz $x=-3$

e) Gráfica

4.- Dada la ecuación de la parábola $x^2+4x-12y-32$, determinar:

a) Vértice $(-2,-3)$

b) Foco $(-2,0)$

c) Lado Recto $=12$

d) Directriz $y=-6$

e) Gráfica

5.- Dada la ecuación de la parábola $y^2+8x-6y+33=0$, determinar:

a) Vértice $(-3,3)$

b) Foco $(-5,3)$

c) Lado Recto $=8$

d) Directriz $x=-1$

e) Gráfica

6.- Dada la ecuación de la parábola $x^2-10x-4y+29=0$, determinar:

a) Vértice $(5,1)$

b) Foco $(5,2)$

c) Lado Recto $=4$

d) Directriz $y=0$

e) Gráfica

UNIDAD 5. CIRCUNFERENCIA, LA ELIPSE Y SUS ECUACIONES CARTESIANAS

Propósito:

Al finalizar la unidad, el alumno será capaz de obtener las ecuaciones cartesianas de la circunferencia y la elipse y trazar sus gráficas correspondientes, dado cualquier conjunto de elementos definitorios. Resolverá problemas donde tales curvas se presenten, con el fin de avanzar en la consolidación del método analítico y desarrollar su habilidad de reconocimiento de formas y estructuras.

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

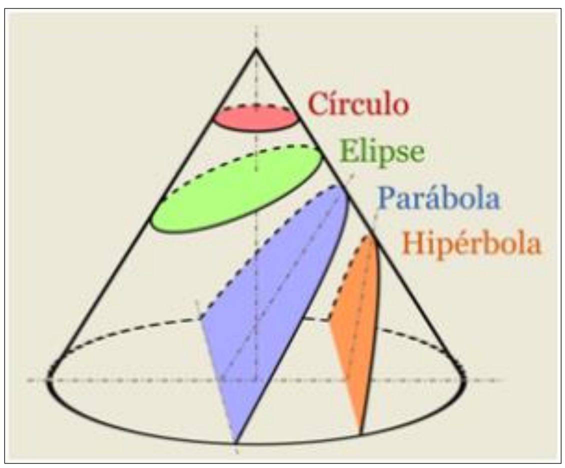
- Deducirá la ecuación ordinaria de la circunferencia e identifica sus elementos (radio y coordenadas del centro).
- Obtendrá la ecuación general de la circunferencia.
- Obtendrá la ecuación ordinaria a partir de la ecuación general y determinará el centro y el radio de una circunferencia.
- El alumno resolverá problemas de corte geométrico.
- Obtendrá la definición de elipse como lugar geométrico e identificará sus elementos.
- Obtendrá la ecuación cartesiana de una elipse, con ejes paralelos a los ejes cartesianos.
- Reconocerá los tipos diferentes de simetría de la elipse.
- Identificará el papel de los parámetros *a, b, c* en la gráfica de la elipse y los empleará en su construcción.
- Determinará los elementos de la elipse transformando la ecuación general a su forma ordinaria.
- Resolverá problemas geométricos y en otros contextos.

LA CIRCUNFERENCIA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Se conocen como secciones cónicas aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano, como se muestra en la figura 1. Las cónicas generales son:

- Elipse: se obtiene al cortar un cono con un plano cuya inclinación es menor al ángulo que forma la superficie lateral del cono con la base.
- Parábola: se obtiene al cortar el cono con un plano cuya inclinación es la misma que la de la superficie lateral del cono.
- Hipérbola: se obtiene al cortar el cono con un plano cuya inclinación es mayor al ángulo que forma la superficie lateral del cono con la base. En este caso, el plano corta a los dos mantos del cono.

Un caso particular de la elipse es precisamente la circunferencia, la cual se obtiene cuando el plano corta al cono horizontalmente. Después de la recta, la línea más familiar al estudiante es la circunferencia, pues la conoce desde sus primeros estudios de Geometría elemental.



Antes de definir a la circunferencia, es importante conocer dos definiciones:

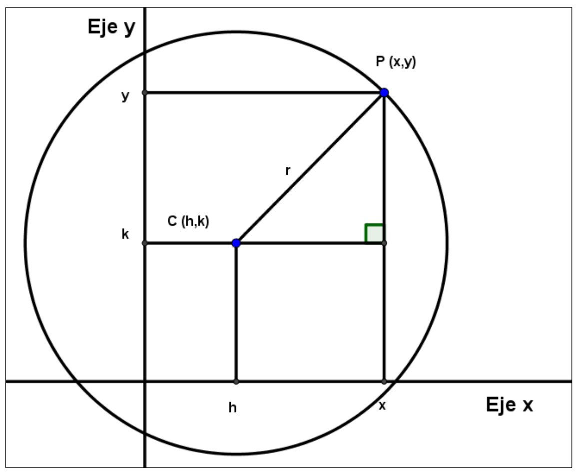
Lugar geométrico: Es el conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación.

Curva: Es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

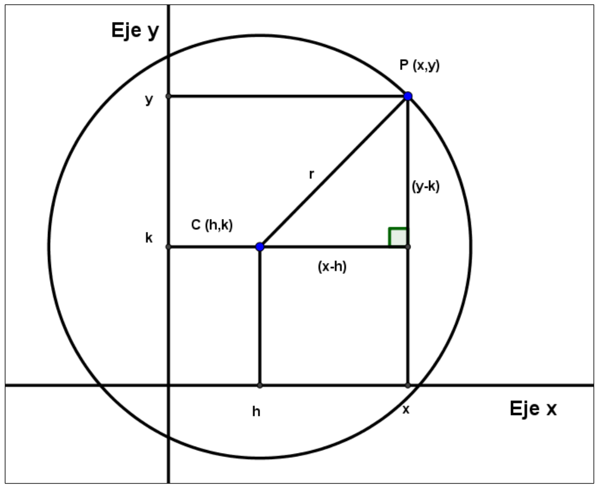
Así pues, conociendo las definiciones anteriores, podemos definir a la circunferencia de la siguiente manera: La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de otro llamado centro.

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y fuera de él.

Podemos deducir la ecuación ordinaria de la circunferencia de la siguiente manera: supongamos un punto $P\,(x, y)$ y otro punto $C(h, k)$, ubicados en un sistema de coordenadas cartesianas. Además, supongamos que el punto P se mueve alrededor del punto C, el cual está fijo, manteniendo una distancia constante llamada r. Si trazamos las proyecciones de P y C hacia los ejes coordenados, obtenemos la figura:



En la figura anterior, podemos observar que se forma un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es el segmento $r = \overline{CP}$, y sus catetos pueden obtenerse a partir de las coordenadas de los puntos C y P de la siguiente manera:



Si obtenemos la longitud de la hipotenusa, es decir del segmento $r = \overline{CP}$, utilizando el Teorema de Pitágoras, tendremos los siguiente:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

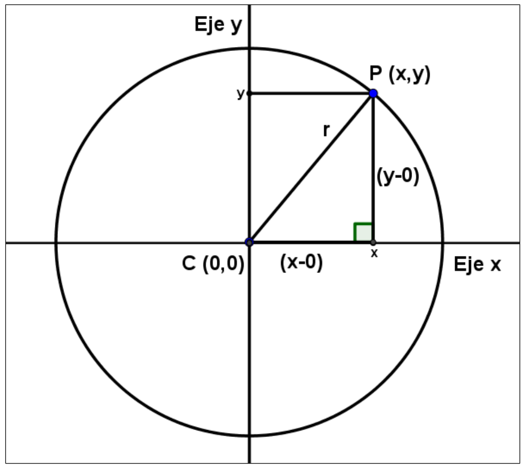
Sustituyendo los valores de los catetos y la hipotenusa tenemos:

$$\boxed{r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2}$$

Que es precisamente, la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen, donde r es el radio y $C(h,k)$ es el centro de la circunferencia, de lo cual se deduce, que los elementos que definen a la circunferencia son el centro y el radio de la misma.

Ahora, si el centro de la circunferencia se ubica justamente en el origen, como se observa en la siguiente figura, los catetos serían únicamente x e y, y la ecuación ordinaria se reduciría a la siguiente:

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2}$$



Ejemplo 1

Obtención de la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen y radio r. Supongamos que el centro de la circunferencia está en el origen; es decir, $C(0,0)$ y su radio es $r = 2$.

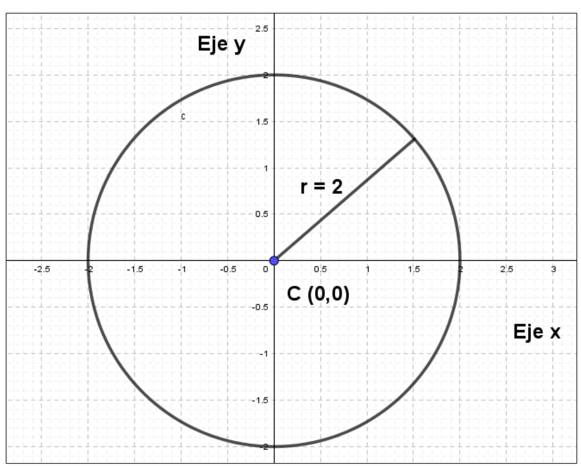
Utilizando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el origen $r^2 = x^2 + y^2$ realizamos la siguiente sustitución:

$$(2)^2 = x^2 + y^2$$

Finalmente, tenemos que la ecuación ordinaria es la siguiente:

$$4 = x^2 + y^2$$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 1.

Ejemplo 2

Obtención de la circunferencia con centro en un punto cualquiera y radio r. Supongamos que el centro de la circunferencia es el punto $C(2,-1)$ y su radio es $r=3$.

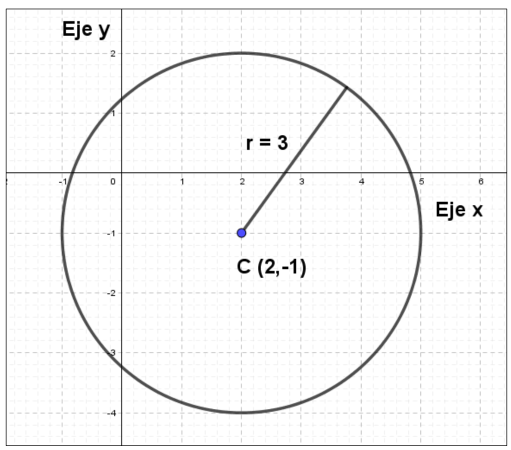
Utilizando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en un punto cualquiera $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$ realizamos la siguiente sustitución:

$$(3)^2=(x-2)^2+(y-(-1))^2$$

Finalmente, tenemos que la ecuación ordinaria es la siguiente:

$$9=(x-2)^2+(y+1)^2$$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 2.

Ejercicios

Obtener la ecuación ordinaria de las siguientes circunferencias, si se conoce su centro y radio.

a) $C(0,0)$ $r=5$

b) $C(-3,0)$ $r=6$

c) $C(0,5)$ $r=10$

d) $C(-2,4)$ $r=8$

Soluciones:

a) $25 = x^2 + y^2$

b) $36 = (x+3)^2 + y^2$

c) $100 = x^2 + (y-5)^2$

d) $64 = (x+2)^2 + (y-4)^2$

Ejemplo 3

Obtención del centro y radio de una circunferencia a partir de la ecuación ordinaria. Supongamos la circunferencia $49 = (x-3)^2 + (y+1)^2$, retomando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en un punto cualquiera $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ y sabiendo que el centro es el punto $C(h,k)$, tenemos que para la circunferencia anterior: $h=3$ y $k=-1$; por lo tanto el centro es $C(3,-1)$, además tenemos que:

$$\begin{aligned} &r^2 = 49 \\ &despejando \\ &r = \sqrt{49} \\ &r = 7 \end{aligned}$$

Ejercicios

Obtener el centro y radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 4/9$

c) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

d) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 10$

e) $(x-5)^2 + y^2 = 16$

f) $(x-1)^2 + (y+6)^2 = 32$

g) $x^2 + (y+3)^2 = 25/4$

Soluciones:

a) $C(0,0)$ $\quad r = 3$

b) $C(0,0)$ $\quad r = 2/3$

c) $C(3,2)$ $\quad r = 2$

d) $C(-4,-1)$ $\quad r = \sqrt{10}$

e) $C(5,0)$ $\quad r = 4$

f) $C(1,6)$ $\quad r = \sqrt{32}$

g) $C(0,-3)$ $\quad r = 5/2$

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

La ecuación general de segundo grado con dos variables es de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Para que una ecuación de segundo grado con dos variables represente una circunferencia es necesario que:

1. No tenga término xy.
2. Los coeficientes x^2 y y^2 sean iguales y del mismo signo.

Si una circunferencia viene dada por una ecuación de la forma:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde $A = C$, se dice que viene dada en su forma general.

Ejemplo 4

Obtención de la ecuación general de una circunferencia dado su centro y radio. Supongamos que el centro de la circunferencia es el punto $C(-2,3)$ y su radio es $r=4$.

Utilizando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en un punto cualquiera $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$ realizamos la siguiente sustitución:

$$(4)^2=(x-(-2))^2+(y-3)^2$$

Finalmente, tenemos que la ecuación ordinaria es la siguiente:

$$16=(x+2)^2+(y-3)^2$$

Para obtener la ecuación en su forma general, primero se desarrollan los binomios, recordando que un binomio al cuadrado se desarrolla de la siguiente manera:

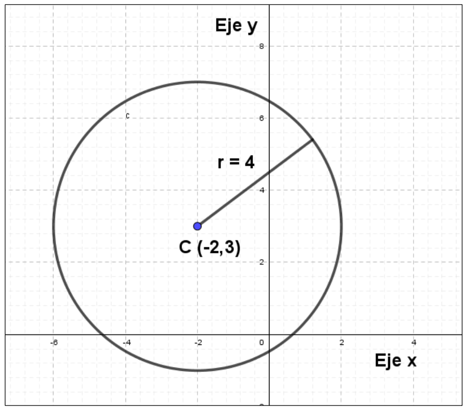
$$\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$$

Posteriormente se iguala a cero, se simplifican términos semejantes y se ordena la ecuación en orden descendente al grado de la variable.

Así tenemos que:

$$16=(x)^2+2(x)(2)+(2)^2+(y)^2+2(y)(-3)+(-3)^2$$
$$16=x^2+4x+4+y^2-6y+9$$
$$x^2+y^2+4x-6y+4+9-16=0$$
$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 4.

Ejercicios

Obtener la ecuación general de las siguientes circunferencias, dado su centro y radio.

a) $C(-2,5)$ $\quad r=2$

b) $C(4,-6)$ $\quad r=7$

c) $C(0,-3)$ $\quad r=\sqrt{15}$

d) $C(1,0)$ $\quad r=1$

e) $C\left(-2,\frac{1}{3}\right)$ $\quad r=\sqrt{7}$

Soluciones:

a) $x^2+y^2+4x-10y+25=0$

b) $x^2+y^2-8x+12y+3=0$

c) $x^2+y^2+6y-3=0$

d) $x^2+y^2-2x=0$

e) $9x^2+9y^2+36x-6y-26=0$

RELACIÓN ENTRE ECUACIÓN ORDINARIA Y ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

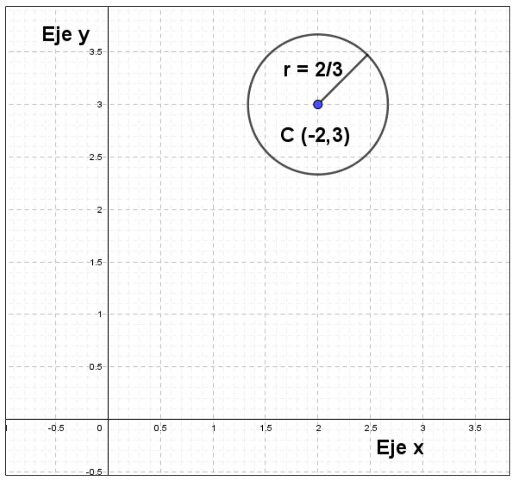
Ejemplo 5

Obtención del centro y radio de una circunferencia a partir de la ecuación general. Supongamos la circunferencia $9x^2+9y^2-36x-54y+113=0$, obtener su centro y radio. Para obtener su centro y radio se seguirá el procedimiento que se indica a continuación:

Paso	Procedimiento algebraico
Si A y C son diferentes a cero, se divide a la ecuación entre ese valor.	$\frac{9x^2+9y^2-36x-54y+113}{9}=\frac{0}{9}$ $x^2+y^2-4x-6y+\frac{113}{9}=0$
Se acomodan los términos por variable.	$x^2-4x+y^2-6y+\frac{113}{9}=0$
Se completa el trinomio cuadrado perfecto para cada variable, el tercer término de cada trinomio cuadrado se resta también en la ecuación para no perder la igualdad.	$x^2-4x+\left(\frac{-4}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{-6}{2}\right)^2+\frac{113}{9}-\left(\frac{-4}{2}\right)^2-\left(\frac{-6}{2}\right)^2=0$ $x^2-4x+4+y^2-6y+9+\frac{113}{9}-4-9=0$ $x^2-4x+4+y^2-6y+9-\frac{4}{9}=0$
Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos, obteniendo dos binomios al cuadrado, y el término independiente es r^2.	$(x-2)^2+(y-3)^2=4/9$

La ecuación obtenida está en forma ordinaria; es decir $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$, y podemos obtener el centro y radio recordando que el centro es $C(h,k)$.	$C(2,3)$ $r=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 5.

Ejercicios

Obtener el centro y radio de las siguientes circunferencias.

a) $x^2+y^2+14x+24=0$

b) $x^2+y^2+6x-2y-2=0$

c) $x^2+y^2-8x+10y-12=0$

d) $2x^2+2y^2-x=0$

e) $4x^2+4y^2-16x+24y+27=0$

f) $4x^2+4y^2-10y=0$

g) $x^2+y^2-x+3y-10=0$

h) $x^2+y^2+8x-4y+11=0$

Soluciones:

a) $C(-7,0)$ $r=5$

b) $C(-3,1)$ $r=\sqrt{12}$

c) $C(4,5)$ $r=\sqrt{53}$

d) $C\left(\frac{1}{4},0\right)$ $r=\frac{1}{4}$

e) $C(2,-3)$ $r=\frac{5}{2}$

f) $C\left(0,\frac{5}{4}\right)$ $r=\frac{5}{4}$

g) $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $r=\frac{5}{\sqrt{2}}$

h) $C(-4,2)$ $r=\sqrt{31}$

Problemas de aplicación

Ejemplo 6

Obtener la ecuación general de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ y con radio igual a 5. Lo primero que se debe saber es que dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro; por lo tanto, debemos obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia para así conocer el centro de la misma. La ecuación ordinaria de la circunferencia anterior es $(x-3)^2+(y-4)^2=4$, de ahí sabemos que el centro de ambas circunferencias es el punto $C(3,4)$.

Utilizando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en un punto cualquiera $r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$ y, sabiendo que el centro es el punto $C(3,4)$ y el radio es $r=5$, realizamos la siguiente sustitución:

$$(5)^2=(x-3)^2+(y-4)^2$$

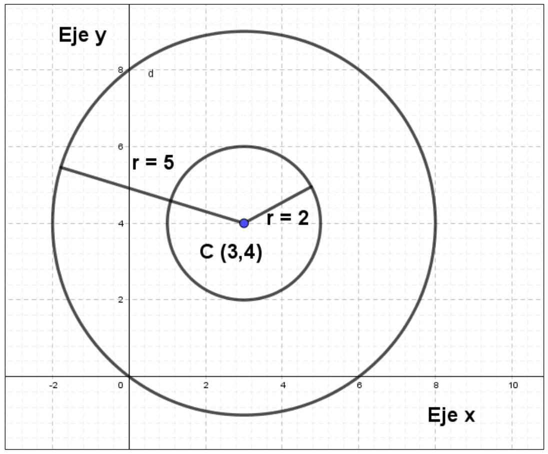
Finalmente, tenemos que la ecuación ordinaria es la siguiente:

$$25=(x-3)^2+(y-4)^2$$

Desarrollando los binomios cuadrados, igualando a cero y reduciendo términos semejantes obtenemos la ecuación general:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 6.

Ejemplo 7

Obtener la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-4,1)$, $B(3,0)$ y $D(5,4)$.

Método 1

Cuando se tiene una circunferencia y quiere conocerse su centro, se ubican tres puntos sobre ella y se construyen dos segmentos utilizando dichos puntos, posteriormente se construyen las mediatrices de dichos segmentos, y el punto donde se intersectan las mediatrices es el centro de la circunferencia. Para este ejemplo se realizará algo similar.

Partimos de los tres puntos por donde pasa la circunferencia así que consideramos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. Posteriormente, obtenemos la mediatriz de cada segmento, recordando que la mediatriz es la recta perpendicular al segmento y que pasa por su punto medio, y que las rectas perpendiculares tienen pendientes recíprocas y de signo contrario.

De acuerdo con lo anterior, obtenemos el punto medio y la pendiente de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.

	Punto medio de un segmento	Pendiente de un segmento
Fórmula	$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Segmento $\overline{AB}$ $A(-4,1)$ $B(3,0)$	$x_m = \frac{-4+3}{2} = \frac{-1}{2} = -0.5$ $y_m = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$ $P_m(-0.5, 0.5)$	$m = \frac{0-1}{3-(-4)} = \frac{-1}{7} = -\frac{1}{7}$ $m = -\frac{1}{7}$
Segmento $\overline{BD}$ $B(3,0)$ $D(5,4)$	$x_m = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ $y_m = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $P_m(4,2)$	$m = \frac{4-0}{5-3} = \frac{4}{2} = 2$ $m = 2$

A continuación, obtenemos la ecuación de las mediatrices de cada segmento, recordando que la mediatriz es perpendicular al segmento y por lo tanto sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

	Pendiente	Ecuación de la mediatriz
Fórmula	$m_1 = -\frac{1}{m_2}$	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Segmento $\overline{AB}$ $A(-4,1)$ $B(3,0)$ $P_m(-0.5, 0.5)$ $m = -\frac{1}{7}$	$m = 7$	$y - 0.5 = 7(x - (-0.5))$ $y - 0.5 = 7(x + 0.5)$ $y - 0.5 = 7x + 3.5$ $7x - y + 4 = 0$
Segmento $\overline{BD}$ $B(3,0)$ $D(5,4)$ $P_m(4,2)$ $m = 2$	$m = -\frac{1}{2}$	$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4)$ $2(y-2) = -1(x-4)$ $2y - 4 = -x + 4$ $x + 2y - 8 = 0$

Recordando que el centro de la circunferencia es el punto donde se intersectan las mediatrices, debemos obtener la solución del sistema integrado por las ecuaciones de las mediatrices, para ello utilizaremos el método de reducción.

Las rectas que integran el sistema son:

$7x - y + 4 = 0$ (ecuación 1)

$x + 2y - 8 = 0$ (ecuación 2)

Supongamos que queremos eliminar a la incógnita x, para ello multiplicaremos a la ecuación 2 por -7.

$-7(x+2y-8) = -7(0)$

$-7x - 14y + 56 = 0$ (ecuación 2)

Ahora tomaremos la ecuación 1 original y la ecuación 2 obtenida después de realizar la multiplicación y realizaremos la reducción:

$7x - y + 4 = 0$

$-7x - 14y + 56 = 0$

$-15y + 60 = 0$ (ecuación 3)

En la ecuación 3 obtenida, despejamos a la incógnita y, obteniendo lo siguiente:

$$y = \frac{-60}{-15} = 4$$

Sabiendo el valor de la incógnita y, lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones originales y obtenemos el valor de la incógnita x:

$7x - y + 4 = 0$ (ecuación 1)

$7x - 4 + 4 = 0$

$7x = 0$

$$x = \frac{0}{7} = 0$$

El punto de intersección de las rectas es $C(0,4)$, y es también el centro de la circunferencia.

Se sabe que el radio de una circunferencia es el segmento que une al centro con un punto cualquiera de la circunferencia, tomaremos el punto $A(-4,1)$, por lo tanto, el radio de la misma será el segmento $\overline{CA}$, donde $C(0,4)$ y $A(-4,1)$.

Utilizando la fórmula de distancia entre dos puntos, podemos obtener el radio:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Sustituyendo las coordenadas de los puntos $C(x_1, y_1)$ y $A(x_2, y_2)$ obtenemos lo siguiente:

$$d = \sqrt{(-4-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Utilizando la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en un punto cualquiera $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$ y, sabiendo que el centro es el punto $C(0,4)$ y el radio es $r = 5$, realizamos la siguiente sustitución:

$$(5)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

Tenemos que la ecuación ordinaria es la siguiente:

$$25 = x^2 + (y-4)^2$$

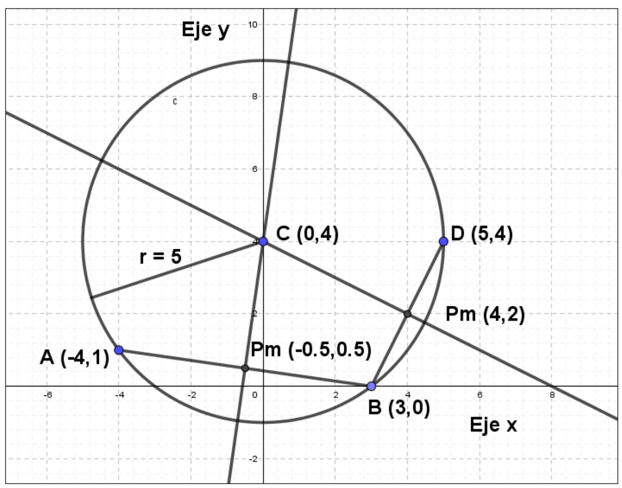
Finalmente, la ecuación general es la siguiente:

$$25 = x^2 + (y-4)^2$$

$$25 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$$x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$$

Su gráfica sería como la que se muestra en la figura siguiente:



Gráfica ejemplo 7.

Método 2

Partimos de la ecuación general de la circunferencia que es de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, y de los puntos por donde pasa, que son: $A(-4,1)$, $B(3,0)$ y $D(5,4)$.

Suponemos que las constantes A y C son iguales a 1, de ahí tenemos que la ecuación general será de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. En la ecuación anterior tenemos tres incógnitas: D, E y F. Para obtener su valor será necesario plantear un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas, para ello utilizaremos las coordenadas de los puntos por donde pasa; así tenemos que para el punto $A(-4,1)$, al sustituir los valores de sus coordenadas en la ecuación general de la circunferencia obtenemos lo siguiente:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$
$$(-4)^2+(1)^2+D(-4)+E(1)+F=0$$
$$-4D+E+F=-17$$

Realizamos el procedimiento anterior con los puntos $B(3,0)$ y $D(5,4)$. y obtenemos las ecuaciones:

$$3D+F=-9$$
$$5D+4E+F=-41$$

El sistema obtenido es el siguiente:

$$-4D+E+F=-17$$
$$3D+F=-9$$
$$5D+4E+F=-41$$

Resolviendo el sistema anterior por algún método algebraico, obtenemos que las incógnitas tienen los siguientes valores:

$$D=0$$
$$E=-8$$
$$F=-9$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación general de la circunferencia $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, obtenemos $x^2+y^2-8y-9=0$, que es la misma ecuación obtenida con el método 1.

Ejemplo 8

Obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-6y-20=0$ en el punto $P(-5,1)$. Es importante recordar que la recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado hacia el punto de tangencia; por lo tanto, será necesario obtener el centro de nuestra circunferencia, para ello obtenemos la ecuación ordinaria que es la siguiente:

$$x^2+(y-3)^2=29$$

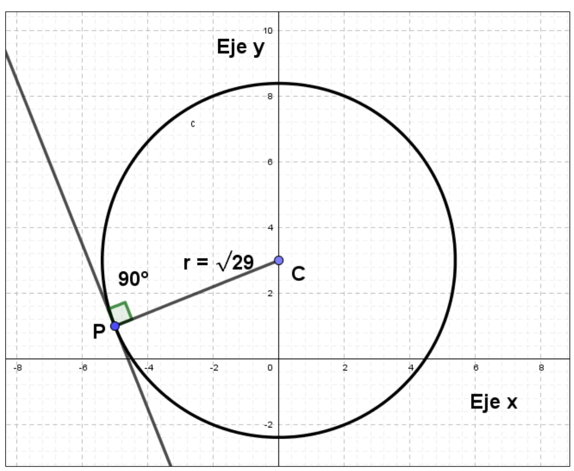
De la ecuación anterior sabemos que el centro es el punto $C(0,3)$ y el radio es $r=\sqrt{29}$. Como la recta tangente es perpendicular al radio, y recordando la condición de perpendicularidad entre dos rectas donde $m_1=-\frac{1}{m_2}$ necesitamos obtener la pendiente del segmento $\overline{CP}$, de lo anterior tenemos:

$$m_{CP}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-3}{-5-0}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

Ahora, sabiendo que la recta tangente pasa por el punto $P(-5,1)$ y su pendiente es $m=-\frac{5}{2}$, obtenemos su ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&y-y_1=m(x-x_1)\\
&y-1=-\frac{5}{2}(x+5)\\
&2(y-1)=-5(x+5)\\
&2y-2=-5x-25\\
&5x+2y+23=0
\end{aligned}$$

La figura sería la siguiente:



Gráfica ejemplo 8.

Ejemplo 9

Obtener las intersecciones de la recta $3x+2y-4=0$ y la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-53=0$. Para resolver el ejemplo, debemos recordar primero, que las intersecciones de dos curvas son la solución del sistema de ecuaciones que integran. Por lo tanto, para obtener el resultado resolveremos el sistema integrado por la recta y la circunferencia. Así, nuestro sistema queda integrado de la siguiente manera:

$3x+2y-4=0$ (ecuación 1)

$x^2+y^2-2x+4y-53=0$ (ecuación 2)

Utilizando el método de sustitución, despejaremos la incógnita x de la ecuación 1 y se realizará la sustitución en la ecuación 2.

$x=\dfrac{-2y+4}{3}$ (ecuación 1)

$\left(\dfrac{-2y+4}{3}\right)^2+y^2-2\left(\dfrac{-2y+4}{3}\right)+4y-53=0$ (ecuación 2)

De esta manera obtenemos una ecuación de segundo grado con una sola incógnita. Realizando la algoritmia necesaria obtenemos lo siguiente:

$$\left(\frac{-2y+4}{3}\right)^2+y^2-2\left(\frac{-2y+4}{3}\right)+4y-53=0$$

$$\frac{(-2y+4)^2}{9}+y^2+\frac{4y}{3}-\frac{8}{3}+4y-53=0$$

$$(-2y+4)^2+9y^2+12y-24+36y-477=0$$

$$4y^2-16y+16+9y^2+12y-24+36y-477=0$$

$$13y^2+32y-485=0$$

La ecuación cuadrática obtenida se resuelve utilizando la fórmula general:

$$\boxed{y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

$$y=\frac{-(32)\pm\sqrt{(32)^2-4(13)(-485)}}{2(13)}=\frac{-32\pm\sqrt{1024+25220}}{26}=$$

$$y=\frac{-32\pm\sqrt{26244}}{26}=\frac{-32\pm162}{26}$$

Por tratarse de una ecuación cuadrática, tendremos dos soluciones:

$$y_1=\frac{-32+162}{26}=\frac{130}{26}=5$$

$$y_2=\frac{-32-162}{26}=\frac{-194}{26}=-\frac{97}{13}\approx-7.46$$

Ahora para tener la solución completa, debemos obtener los valores de la incógnita x correspondiente.

Recordando la ecuación donde despejamos a la incógnita x; es decir: $x=\frac{-2y+4}{3}$,

se van a sustituir los valores obtenidos de la incógnita y:

$$x_1=\frac{-2(5)+4}{3}=\frac{-10+4}{3}=\frac{-6}{3}=-2$$

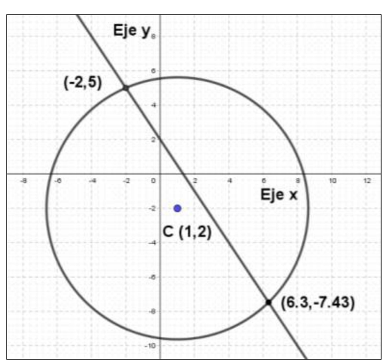
$$x_2=\frac{-2\left(-\frac{97}{13}\right)+4}{3}=\frac{\frac{194}{13}+4}{3}=\frac{\frac{246}{13}}{3}=\frac{82}{13}\approx6.3$$

De lo anterior sabemos que las soluciones del sistema son:

$(-2,5)$ y $\left(\frac{82}{13},-\frac{97}{13}\right)$ o bien:

$(-2,5)$ y $(6.3,-7.46)$

En la siguiente figura se pueden observar las intersecciones anteriores.



Gráfica ejemplo 9.

Ejercicios:

a) Obtener la ecuación general de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento $\overline{AB}$, donde $A(2,-3)$ $B(-4,5)$.

b) Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto $C(-3,-2)$ y pasa por el punto $P(-3,2)$.

c) Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto $C(-1,-2)$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $2x+5y-2=0$ y $x-2y+8=0$.

d) Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto $C(2,1)$ y que es tangente a la recta $5x+4y+27=0$.

e) Obtener la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $x+3y=0$ y $2x-y-7=0$, y tiene radio $r=4$.

f) Obtener la ecuación general de la circunferencia que tiene $r=2$ y es concéntrica a la circunferencia $8x^2+8y^2-72x-32y-10=0$.

g) Obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-6y-20=0$ en el punto $P(-5,1)$.

h) Obtener la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $M(1,3)$, $N(4,0)$ y $P(1,-1)$.

i) Obtener la ecuación general de la circunferencia con centro en el punto $C(3,5)$ y que es tangente a la recta $-3x-y+1=0$.

j) Obtener las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2-3=0$ y la recta secante $2x-y-3=0$.

k) Obtener las intersecciones de la circunferencia $x^2+y^2-6y-31=0$ y la recta $x+3y+11=0$.

Soluciones:

a) $x^2+y^2+2x-2y-23=0$

b) $x^2+y^2+6x+4y-3=0$

c) $x^2+y^2+2x+4y-20=0$

d) $x^2+y^2-4x-2y-36=0$

e) $x^2+y^2-6x+2y-6=0$

f) $4x^2+4y^2-36x-16y+81=0$

g) $5x+2y+23=0$

h) $x^2+y^2-4x-2y=0$

i) $10x^2+10y^2-60x-100y+171=0$

j) $(1.69, 0.38)$ y $(0.71, -1.58)$

k) $(-2, -3)$

LA ELIPSE

La elipse es un lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos siempre es constante.

F_1, F_2 Focos

L Eje focal

V_1, V_2 Vértices, puntos donde la elipse corta al eje focal

C Centro, punto medio del segmento que une a los focos

$\overline{\boldsymbol{B_1B_2}}$ Eje menor

LR Lado recto de la elipse; son dos uno en cada foco; su longitud es el ancho focal

P Es un punto cualquiera de la curva. Con coordenadas (x,y)

2a Distancia desde un punto P(x,y) a los focos; Eje mayor $\overline{\boldsymbol{V_1V_2}}$

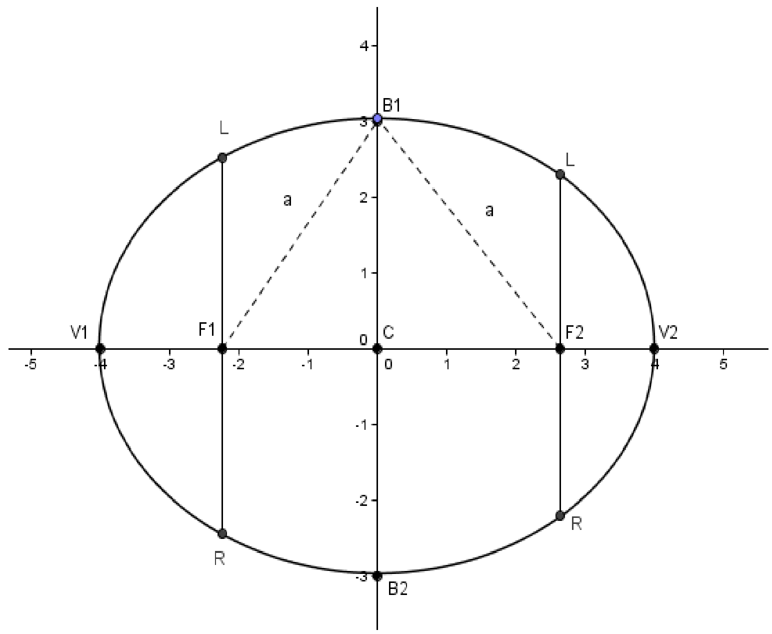
a Semieje mayor, distancia del centro a uno de los focos.

2b Distancia entre $\mathbf{B_1}$ y $\mathbf{B_2}$, eje menor.

b Semieje menor.

2c Distancia entre los focos.

c Distancia del centro a uno de los focos.



FORMA GENERAL DE LA ECUACIÓN DE LA ELIPSE

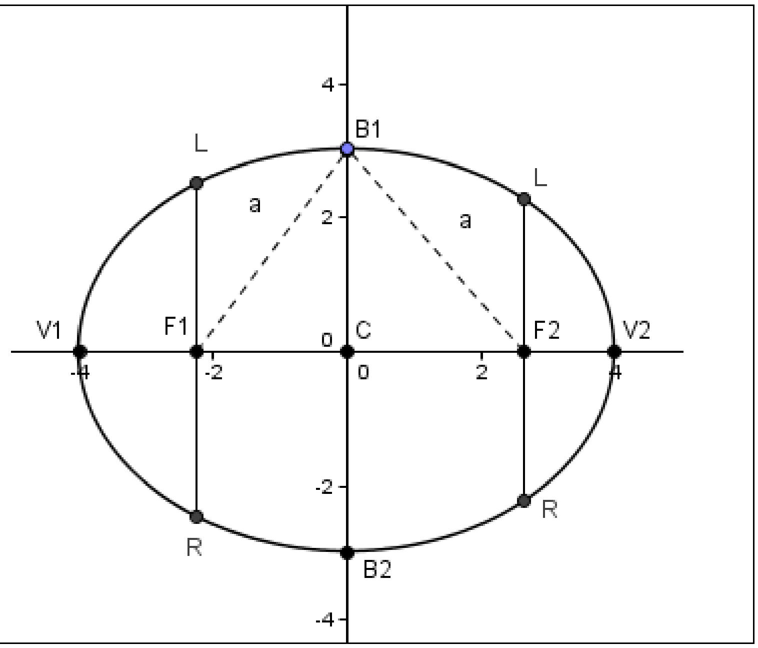
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

En donde $A \neq B \neq 0$, ambos coeficientes del mismo signo.
Ejemplos de las ecuaciones de la elipse expresadas en su forma general.

$$4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$$
$$4y^2 + 8x^2 + 16y + 64x + 112 = 0$$
$$9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$$

ECUACIONES DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

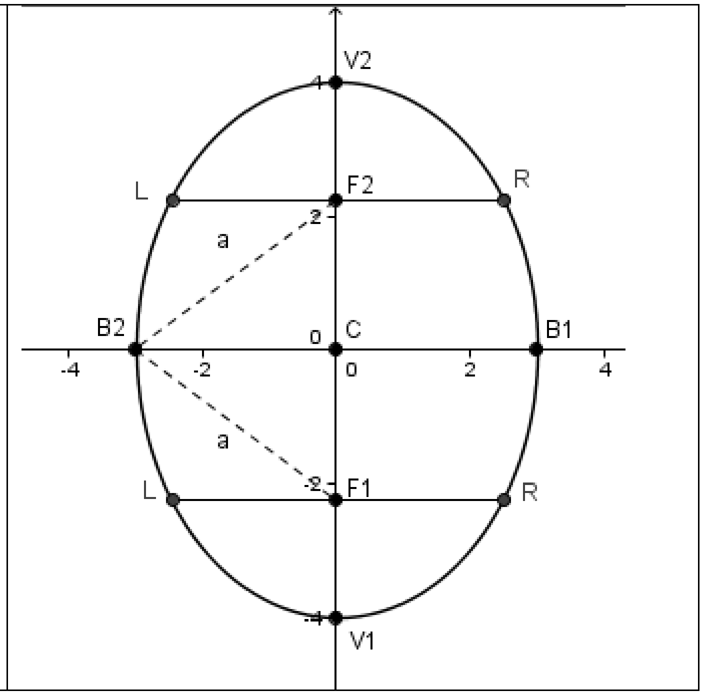
ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE HORIZONTAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ El eje focal coincide con el eje x Centro en el origen	

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE VERTICAL CON CENTRO EN EL ORIGEN

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Centro en el origen
El eje focal coincide con el eje y



En las dos ecuaciones anteriores los valores de los denominadores a^2 y b^2 son siempre números positivos, de estos, al valor mayor lo igualamos con a^2 y el menor con b^2, siempre **a^2 › b^2.**

Además, el valor absoluto mayor nos indica dónde están situados los focos, si sobre el eje x o sobre el eje y.
Por ejemplo.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Como el valor absoluto mayor corresponde al denominador de x^2, los focos están sobre el eje x. Por lo tanto, la elipse es

____

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Como el valor absoluto mayor corresponde al denominador de y^2, los focos están sobre el eje y. Por lo tanto, la elipse es

____

¿Cómo determinar si una elipse es horizontal o vertical a partir de su ecuación?

____

____

LADO RECTO DE LA ELIPSE

La cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal se llama **lado recto de la elipse** y al calcularlo se obtiene el ancho focal de esta curva.

$$\boxed{Lado\ Recto = Ancho\ focal = \left|\frac{2b^2}{a}\right|}$$

Ejemplo. Determinar el ancho focal de la elipse

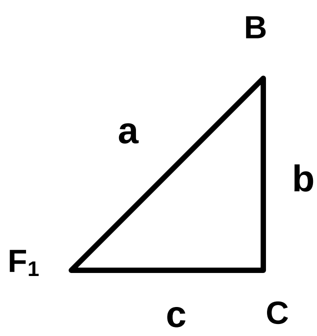
$\boldsymbol{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$	$a^2 = 25 \quad \rightarrow \quad a = 5$ $b^2 = 16 \quad \rightarrow \quad b = 4$ ∴ La elipse es horizontal	$Lado\ Recto = Ancho\ focal = \left\|\frac{2b^2}{a}\right\|$ $Ancho\ focal = \left\|\frac{2(4)^2}{5}\right\| = \left\|\frac{2(16)}{5}\right\|$ $Ancho\ focal = \frac{32}{5}$

EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE

En una elipse, la razón que existe entre c y a que expresado como cociente es $\frac{c}{a}$, se llama **excentricidad de la elipse.** Se determina con la siguiente expresión:

$$\boxed{Excentricidad = e = \frac{c}{a}}$$

Si desconocemos el valor de c, podemos calcularlo con base en el triángulo F_1CB_1, aplicando el teorema de Pitágoras.



$$\boxed{\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}}$$

a determinar c:

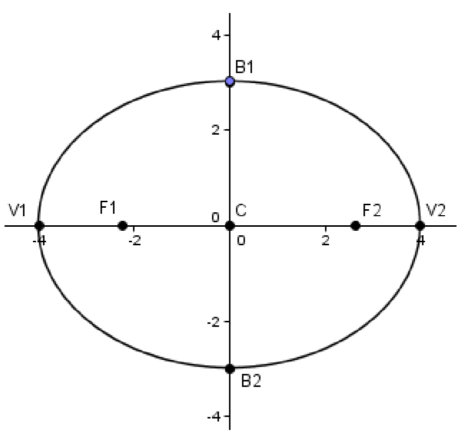
$$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$

- ✓ La excentricidad indica la forma de la elipse cuyo valor varía de $0 < e < 1$.
- ✓ Cuando *e* se aproxima a cero la curva se asemeja a un circulo.
- ✓ Cuando *e* se aproxima a 1 la elipse se alarga y se hace angosta.

Ejemplo: Dada la elipse $9x^2 + 16y^2=144$, obtener:

a) El valor de los ejes mayor y menor.
b) El valor del ancho focal y la excentricidad
c) Las coordenadas de los focos, vértices y extremos del eje menor
d) Realizar el bosquejo de la gráfica.

Forma General $\boldsymbol{9x^2 + 16y^2 - 144 = 0}$ **Convertirla en su forma ordinaria:** $$\boldsymbol{9x^2 + 16y^2 = 144}$$ $$\boldsymbol{\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}}$$ **Simplificando** $$\boldsymbol{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$$	$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$ $b^2 = 9 \rightarrow b = 3$ ∴ La elipse es horizontal Para determinar c: $$\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$$ $$\boldsymbol{c = \sqrt{16 - 9}}$$ $$\boldsymbol{c = \sqrt{7}}$$ Eje mayor = $2a = 2(4) = 8$ Eje menor = $2b = 2(3) = 6$	$Lado\ Recto = Ancho\ focal = \left\lvert\frac{2b^2}{a}\right\rvert$ $Ancho\ focal = \left\lvert\frac{2(3)^2}{4}\right\rvert = \left\lvert\frac{2(9)}{4}\right\rvert$ $Ancho\ focal = \frac{18}{4}$ $Excentricidad = e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66$



Coordenadas

Vértices	Focos	Polos del eje menor
V1 (-4,0)	**F1 ($-\sqrt{7}$, 0)**	**B1 (0, 3)**
V2 (4,0)	**F2 ($\sqrt{7}$, 0)**	**B2 (0, -3)**

ECUACIONES DE LA ELIPSE CON CENTRO (h, k) Y SUS EJES PARALELOS A LOS EJES COORDENADOS.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE HORIZONTAL CON CENTRO (h,k)

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2}=\mathbf{1}$$

Elipse con centro (h,k) fuera del origen.
Ecuación donde el mayor es paralelo al eje x.

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE VERTICAL CON CENTRO (h,k)

$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{b}^2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{a}^2}=\mathbf{1}$$

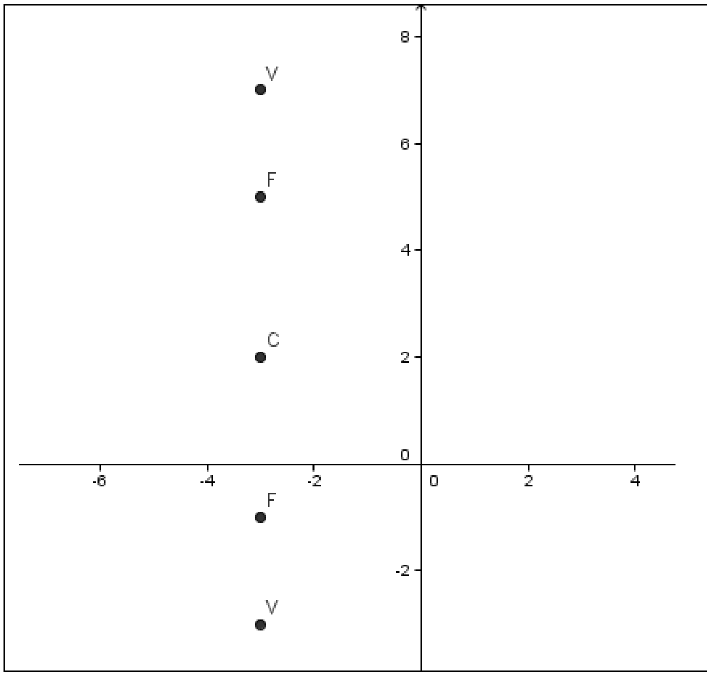
Elipse con centro (h,k) fuera del origen.
Ecuación donde el mayor es paralelo al eje y.

Como en el caso de la elipse con centro en el origen a, b, y c están relacionados por el teorema de Pitágoras, el Ancho focal y la Excentricidad se calculan con las mismas expresiones.

$Lado\ recto = Ancho\ focal = \left|\frac{2b^2}{a}\right|$ $\qquad$ $Excentricidad = e = \frac{c}{a}$

Ejemplo 1. Obtener la ecuación de la elipse en su forma ordinaria y general, la excentricidad, el ancho focal, las coordenadas de los polos del eje menor y bosquejar la gráfica correspondiente de la elipse con centro en el punto (-3,2) y los vértices en (-3,7), (-3,-3); focos en (-3,5), (-3,-1).

Graficando los datos, se determina que la elipse es vertical, con centro fuera del origen.	De la gráfica se puede determinar: $a = 5 \quad \rightarrow \quad a^2 = 25$ $c = 3 \quad \rightarrow \quad c^2 = 9$ Para determinar **b**: $\boldsymbol{b} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{c}^2}$ $\boldsymbol{b} = \sqrt{\mathbf{25} - \mathbf{9}}$ $\boldsymbol{b} = \sqrt{\mathbf{16}} = \mathbf{4}$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Eje mayor = $2a = 2(5) = 10$
Eje menor = $2b = 2(4) = 8$

Al graficar el eje menor se observa que las coordenadas de los polos del eje menor son:

B_1 (-7,2) Y B_2 (1,2) Termina de bosquejar la gráfica.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$$Lado\ Recto = Ancho\ focal = \left|\frac{2b^2}{a}\right|$$ $$Ancho\ focal = \left|\frac{2(4)^2}{5}\right| = \left|\frac{2(16)}{5}\right|$$ $$Ancho\ focal = \frac{32}{5}$$</td>
<td rowspan="2">La ecuación ordinaria debe ser la de una elipse vertical:
$$\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}} + \frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}} = \mathbf{1}$$ Sustituyendo los valores:
$h = -3$, $k = 2$, $a^2 = 25$, $b^2 = 16$

Se obtiene la ecuación.
$$\frac{(\boldsymbol{x}+\mathbf{3})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{16}} + \frac{(\boldsymbol{y}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}}{\mathbf{25}} = \mathbf{1}$$ ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE</td>
</tr>
<tr>
<td>$$Excentricidad = e = \frac{c}{a}$$ $$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0.6$$</td>
</tr>
</table>

Para determinar la ecuación en su forma general:

1. Se desarrollan los binomios al cuadrado

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{16} + \frac{y^2 - 4y + 4}{25} = 1$$

2. Se multiplica por los denominadores 16 y 25

$$25(x^2+6x+9)+16\ (y^2-4y+4)=1(25)(16)$$
$$25x^2+150x+225+16y^2-64y+64=400$$

3. Se ordenan los términos, se iguala a cero y se suman los términos independientes.

$$25x^2+16y^2+150x-64y-111=0$$

Ejemplo 2. Obtener la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, la excentricidad, el ancho focal, las coordenadas de los vértices, focos, los polos del eje menor, el centro; y bosquejar la gráfica correspondiente de la elipse cuya ecuación general es:

$$9x^2+4y^2-72x-16y+124=0$$

1. Se agrupan los términos que tengan la misma literal y el término independiente se transpone.

$$(9x^2-72x)+(4y^2-16y)=-124$$

2. Se factorizan para completar un trinomio cuadrado perfecto.

$$9(x^2-8x)+4(y^2-4y)=-124$$

3. Se completan los trinomios cuadrados perfectos y se balancea la ecuación.

$$9(x^2-8x+16)+4(y^2-4y+4)=-124+9(16)+4(4)$$

4. Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos.

$$9(x-4)^2+4(y-2)^2=36$$

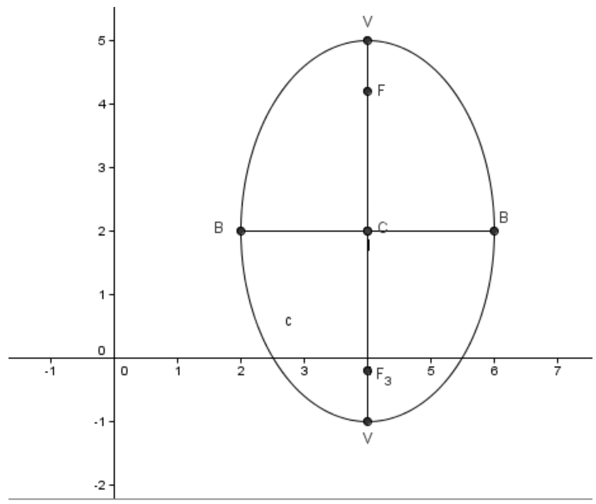
5. Se divide toda la ecuación entre 36; para igualar a uno.

$$\frac{9(x-4)^2}{36}+\frac{4(y-2)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

6. Se simplifica para obtener la ecuación ordinaria.
7.

$$\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

De esta ecuación se determina que la elipse es vertical, los valores de $a^2=9$, $b^2=4$ y el centro de la elipse C(4, 2).

Se tiene que $a^2 = 9 \quad \rightarrow \quad a = 3$ $b^2 = 4 \quad \rightarrow \quad b = 2$ $\therefore$ La elipse es vertical Para determinar c: $\boldsymbol{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$ $\boldsymbol{c = \sqrt{9-4}}$ $\boldsymbol{c = \sqrt{5}}$ Eje mayor = $2a = 2(3) = 6$ Eje menor = $2b = 2(2) = 4$ $Lado\ Recto = \left\lvert \frac{2b^2}{a} \right\rvert$ $= \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$ $Excentricidad = e = \frac{c}{a}$ $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ $= 0.745$		**C (4, 2)** **V (4, 5)** **V(4, -1)** **F (4, 4.2)** **F (4, -0.2)** **B (2, 2)** **B (6, 2)**

EJERCICIOS. Considerando los siguientes datos; determinar en cada caso:

a) El valor de los ejes mayor y menor
b) El valor del ancho focal y la excentricidad
c) Las coordenadas de los focos, vértices y extremos del eje menor
d) Las coordenadas del centro
e) La ecuación ordinaria y general de la elipse.
f) El bosquejo de la gráfica

1. $3x^2+2y^2= 6$

2. $x^2 + 3y^2 = 6$

3. Centro (0,0)

Eje mayor vertical igual a 10
Eje menor igual a 8

4. Vértices en (5,0) y (-5,0)
   Focos en (3, 0) y (-3,0)

5. Excentricidad = $\frac{4}{5}$
   Focos (4,0) y (-4,0)

6. Vértices en (0,6) y (0,-6)
   Excentricidad= $\frac{2}{3}$

7. Vértices (2,2) y (-4,2)
   Excentricidad= $\frac{\sqrt{5}}{3}$

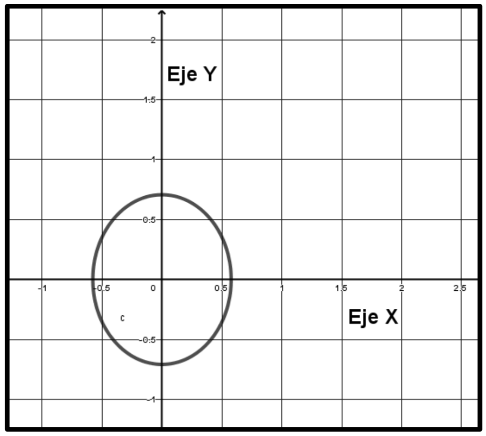
8. Focos (-1,-1) y (-1,3)
   Vértices (-1,-3) y (-1,5)

9. Eje mayor es el segmento $\overline{\boldsymbol{V_1V_2}}$
   V_1 (4,6) V_2 (12,6)
   Eje menor es el segmento $\overline{\boldsymbol{B_1B_2}}$
   B_1 (8,3) B_2 (8,9)

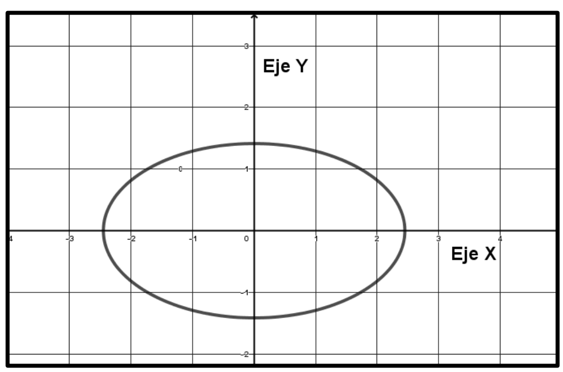
10. $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}$
11. $39x^2 + 64y^2 - 858x + 256y + 2479 = 0$
12. $9x^2 + 4y^2 - 72x - 16y + 124 = 0$

RESPUESTAS

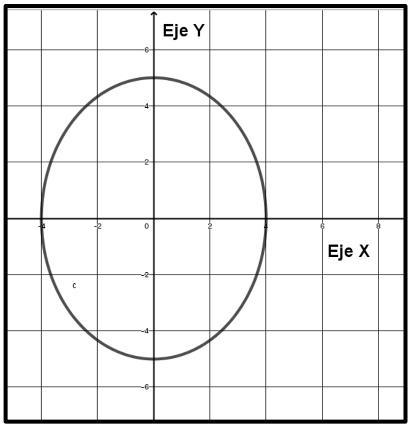
1. a) 2a = $2\sqrt{3}$ 2b = $2\sqrt{2}$
   b) ancho focal = $4/\sqrt{3}$ excentricidad = $1/3$
   c) V1 (0, $\sqrt{3}$)   F1 (0,1)   B1 ($\sqrt{2}$,0)
      V1 (0, -$\sqrt{3}$)   F2 (0, -1)   B2 (-$\sqrt{2}$,0)
   d) C (0,0)
   e) Ecuación ordinaria $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$

f) 

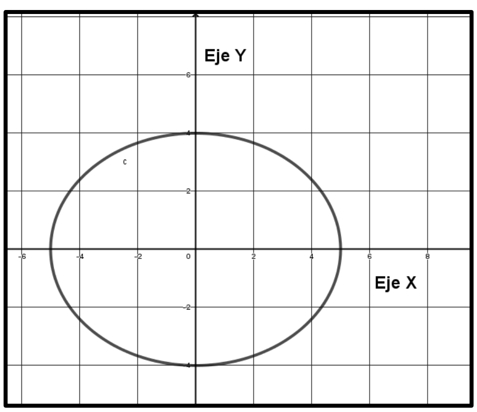
2. a) 2a = $2\sqrt{6}$ 2b = $2\sqrt{2}$
   b) ancho focal = $4/\sqrt{6}$ excentricidad = $2/\sqrt{6}$
   c) V1 ($\sqrt{6}$,0) F1 (2,0) B1 (0,$\sqrt{2}$)
      V1 (-$\sqrt{6}$,0) F2 (-2,0) B2 (0,-$\sqrt{2}$)
   d) C (0,0)
   e) Ecuación ordinaria $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

f) 

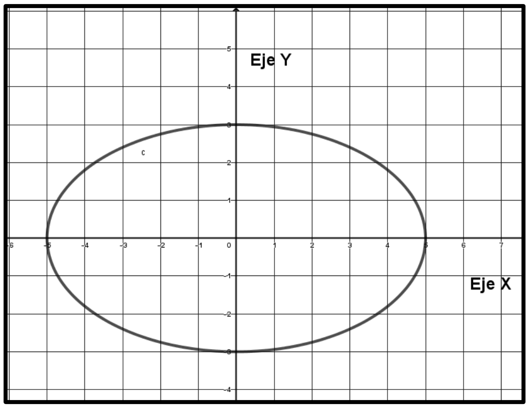
3. a) 2a =10 2b = 8
   b) ancho focal = $32/5$ excentricidad = $3/5$
   c) V1 (0,5) F1 (0,3) B1 (4,0)
      V1 (0,-5) F2 (0,-3) B2 (-4,0)
   d) C (0,0)
   e) Ecuación ordinaria $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$
      Ecuación general $25x^2+16y^2-400=0$

f) 

4. a) 2a =10 2b = 8
   b) ancho focal = $32/5$ excentricidad = $3/5$
   c) B1 (0,4)
   B2 (0,-4)
   d) C (0,0)
   e) Ecuación ordinaria $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$
   Ecuación general $16x^2+25y^2-400=0$

f) 

5. a) 2a =10 2b = 9
   b) ancho focal = $18/5$ excentricidad = $4/5$
   c) V1 (5,0) F1 (4,0) B1 (0,3)
   V1 (-5,0) F2 (-4,0) B2 (0,-3)
   d) C (0,0)
   e) Ecuación ordinaria $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$
   Ecuación general $9x^2+25y^2-225=0$

f) 

6. a) 2a =12 2b = $4\sqrt{5}$

 b) ancho focal = $20/3$ excentricidad = $1/3$

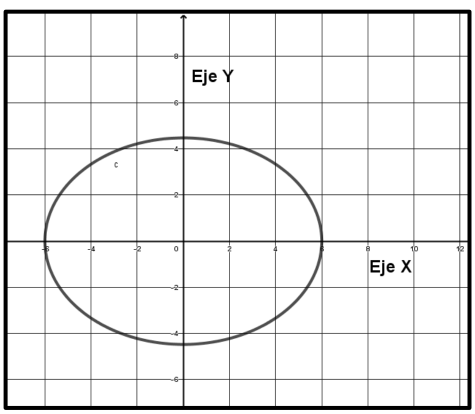
 c) F1 (0,4) B1 ($2\sqrt{5}$,0)

 F2 (0,-4) B2 (-,0 $2\sqrt{5}$)

 d) C (0,0)

 e) Ecuación ordinaria $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

 Ecuación general $20x^2+36y^2-720=0$

f) 

7. a) 2a =6 2b = 4

 b) ancho focal = $8/3$ excentricidad = $\sqrt{5}/3$

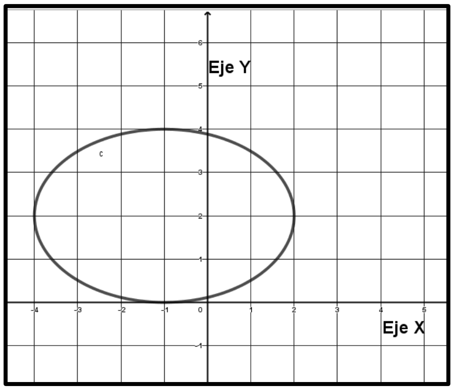
 c) F1 (-1+$\sqrt{5}$,2) B1 (-1,4)

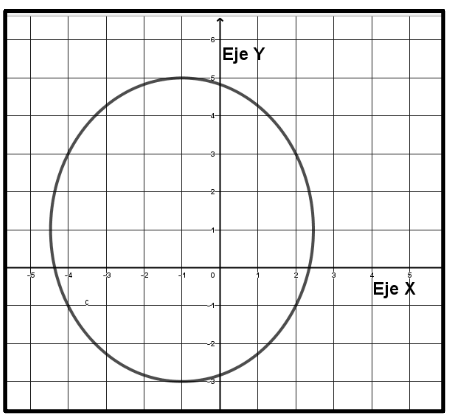
 F2 (-1 -$\sqrt{5}$,2) B2 (-1,0)

 d) C (-1,2)

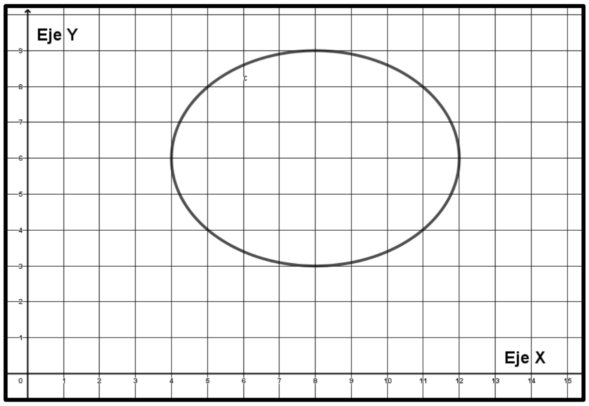
 e) Ecuación ordinaria $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

 Ecuación general $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$

f) 

8. a) 2a =8 2b = $4\sqrt{3}$
   b) ancho focal = 6 excentricidad = $\frac{1}{2}$
   c) B1 (-1+$2\sqrt{3}$,1)
   B2 (-1-$2\sqrt{3}$,1)
   d) C (-1,1)
   e) Ecuación ordinaria $\frac{(x+1)^2}{12}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$
   Ecuación general $16x^2+12y^2+32x-24y-164=0$
   f) 

9. a) 2a =8 2b = 6
   b) ancho focal = $\frac{9}{2}$ excentricidad = $\frac{\sqrt{7}}{4}$
   c) F1 (8+$\sqrt{7}$,6)
   F2 (8-$\sqrt{7}$,6)
   d) C (8,6)
   e) Ecuación ordinaria $\frac{(x-8)^2}{16}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$
   Ecuación general $9x^2+16y^2-144x-192y+1008=0$

f) 

10. a) 2a = 6 — 2b = 4

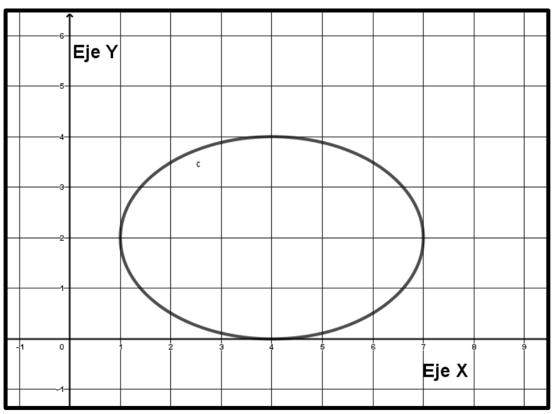
b) ancho focal = $\frac{8}{3}$ — excentricidad = $\frac{\sqrt{5}}{3}$

c) V1 (1,2) — B1 (4,4) — F1 (4+$\sqrt{5}$,2)

V2 (7,2) — B2 (4,0) — F1 (4 -$\sqrt{5}$,2)

d) C (4,2)

e) Ecuación general $4x^2+9y^2-32x-36y+64=0$

f) 

11. a) 2a = 16 — 2b = $2\sqrt{39}$

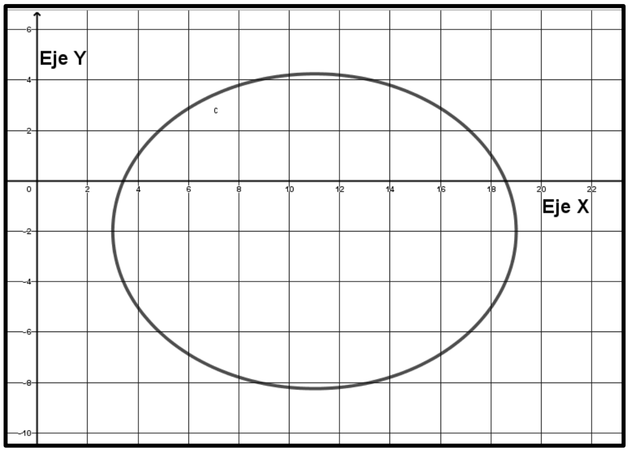
b) ancho focal = $\frac{39}{4}$ — excentricidad = $\frac{5}{8}$

c) V1 (19,-2) — B1 (11,-2+$2\sqrt{39}$) — F1 (16,-2)

V2 (3,-2) — B2 (11,-2 -$2\sqrt{39}$) — F1 (6,-2)

d) C (11,-2)

e) Ecuación ordinaria $\frac{(x-11)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{39}=1$

f) 

12. a) 2a = 6   2b = 4

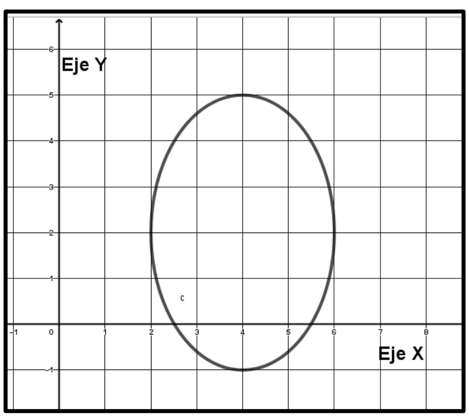
b) ancho focal = $8/3$ excentricidad = $\sqrt{5}/3$

c) V1 (4,5)   B1 (6,2)   F1 (4,2+$\sqrt{5}$)

V2 (4,-1)   B2 (2,2)   F1 (4,2-$\sqrt{5}$)

d) C (4,2)

e) Ecuación ordinaria $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

f) 

Bibliografía

1. **BALDOR, A.** (1985). *Álgebra.* México: Publicaciones Cultural.
2. **BARNETT** R. (1988), *Álgebra y trigonometría*. Segunda Edición. Mc. Graw-Hill.
3. **F. J. ORTIZ CAMPOS**. (1990). *Matemáticas- 2 GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA*. Publicaciones Cultural.México D. F.
4. **SMITH, A.S. ET AL.** (1998). *Álgebra y trigonometría y geometría analítica*. Addison Wesley Longman.
5. **SMITH.** (1992). *Álgebra*. Addison Wesley.
6. **SWOKOWSKI, E.** (1998). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (2da. ed.). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
7. **Charles H., Lehmann**. *Geometría Analítica.* México. Limusa. 2005.
8. **Marcelo, Santalo; Vicente, Carbonel**. *Geometría Analítica*. México. Porrúa. 1983.
9. **Caballero, Arquímedes**. *Geometría analítica*. Esfinge, México, 2000
10. **Filloy, Eugenio y Hitt**, **Fernando**, *Geometría analítica*, Iberoamérica, México, 1997
11. **Fuenlabrada, Samuel**. *Geometría analítica.* Mc Graw-Hill, México, 2000
12. **Leithold, Louis**. *Algebra y trigonometría con geometría analítica*. Harla, México 1994
13. **Swokowski, Earl**. *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, Iberoamérica, 2002