UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

PLANTEL NAUCALPAN

GUÍA DE MATEMÁTICAS II
PLAN ACTUALIZADO

SEMINARIO LOCAL DE MATEMATICAS, TURNO MATUTINO

Naucalpan de Juarez, 2017

Guía de Matemáticas II.

La presente guía fue elaborada en el Área de Matemáticas del Plantel Naucalpan del Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México.
La publicación es un producto del Seminario Local de Matemáticas del CCH-Naucalpan. ***Turno Matutino****.*

Coordinador
Ismael Nolasco Martínez

Autores

Angélica Garcilazo Galnares
Brenda del Carmen Muñoz Ramírez
Dante Octavio Carretero
Emelia Norma Venegas Ocampo
H. Laura Paz Santiago
Ismael Nolasco Martínez
Mauricio Albuerne Sánchez
Miriam Sandoval León
Omar Anguiano Sánchez
Paola Tamayo López
Pedro Cázares Mena
Sandra Verónica Roldán Meneses
Sergio Vargas Herrera
Verónica Méndez Nolasco
Viviana Vázquez Flores

Primera versión: Junio de 2017
Primera revisión: Mayo 2018.
D.R. UNAM. CCH. Naucalpan, 2017.
Av. De los Remedios No.10
Naucalpan de Juárez.
Teléfonos: 53600323; 53600324.
Naucalpan de Juárez, estado de México.

Índice

UNIDAD I. ECUACIONES CUADRÁTICAS.

PROPÓSITO DE LA UNIDAD: Al finalizar la unidad el alumno resolverá ecuaciones cuadráticas mediante diversos métodos de solución. Modelará problemas que conduzcan a este tipo de ecuaciones. Establecerá la relación que existe entre el grado de la ecuación y el número de soluciones.

APRENDIZAJES.

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Analizará las condiciones que se establecen en el enunciado de un problema, y expresará las relaciones entre lo conocido y lo desconocido a través de una ecuación de segundo grado.
- Relacionará un problema nuevo con otro que ya sabe resolver.
- Interpretará en el contexto del problema, lo que significan las soluciones y elegirá, si es el caso, aquella que tiene sentido en ese contexto.
- Resolverá ecuaciones cuadráticas mediante los diferentes métodos de solución. Transformando la ecuación cuadrática a la forma adecuada para su resolución por un método específico.
- Generalizará el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y obtendrá la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
- Identificará los parámetros a, b, c en una ecuación cuadrática y los sustituye correctamente en la fórmula general.
- Identificará la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática, a partir de sus coeficientes
- Establecerá el modelo matemático del problema y aplicará el método de resolución conveniente

ECUACIONES CUADRATICAS

1.1. Situaciones que conducen al planteamiento de ecuaciones cuadráticas.

Definición.

Una ecuación cuadrática, es una igualdad de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}, con\ a\neq 0, b, c\ \in P$$

EJEMPLOS:

1.- A un baile asistieron igual número de hombres que de mujeres. Si cada hombre bailó con todas las mujeres y cada mujer bailó con todos los hombres y en total se hicieron 225 parejas distintas. ¿Cuántas personas hubo en el baile?

Solución: Sea x: el total de personas, entonces

$$\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)=225 \qquad \textit{por ser igual número de hombres y de mujeres}$$

$$\frac{x^2}{4}=225 \qquad \textit{efectuando el producto}$$

$$\frac{x^2}{4}-225=0 \qquad \textit{sumando } -225 \textit{ a ambos miembros}$$

$$x^2-900=0 \qquad \textit{multiplicando por } 4$$

La ecuación que resulta es de la forma $ax^2+c=0$

2.- Los catetos de un triángulo rectángulo miden x y $3x+3$, la hipotenusa mide $4x-3$. ¿Cuál es el valor numérico de cada cateto y la hipotenusa del triángulo?

Solución: Por el Teorema de Pitágoras tenemos que

$$x^2+(3x+3)^2=(4x-3)^2 \qquad \textit{realizando las operaciones indicadas}$$

$$x^2+9x^2+18x+9=16x^2-24x+9 \qquad \textit{simplificado}$$

$$6x^2-42x=0$$

La ecuación que resulta es de la forma $ax^2+bx=0$

3.- Los problemas sobre tasas de interés se pueden resolver utilizando ecuaciones cuadráticas. Si se deposita dinero en una cuenta de ahorros, se reciben intereses al final del año. Al final del segundo año se recibe interés sobre la cantidad original y sobre el interés. Éste se llama **interés compuesto** anual. Una cantidad de dinero llamado capital C, se invierte a una tasa de interés *r*. En *t* años aumentará hasta una cantidad A dada por: $A = C(1+r)^t$. Supongamos que se invierten $256.00 a una tasa de interés *r* compuesto anual. En dos años aumentará hasta $289.00. ¿Cuál es la tasa de interés?

Solución: Sabemos que:

$A = 289$

$C = 256$

$t = 2$

Sustituyendo en $A = C(1+r)^t$ tenemos:

$289 = 256(1+r)^2 \quad \textit{cambiando los miembros de la igualdad}$

$256(r+1)^2 = 289$

La ecuación que resulta es de la forma $a(x+h)^2 = k$

4.- El recíproco de un número más el doble del número es igual a $\frac{9}{2}$. Encuentra los números.

Solución: Llamamos x, y $\frac{1}{x}$ a los números buscados, entonces

$$\frac{1}{x} + 2x = \frac{9}{2} \qquad \textit{multiplicando por } 2x$$

$$2 + 4x^2 = 9x \qquad \textit{igualando con cero}$$

$$4x^2 - 9x + 2 = 0 \qquad \textit{factorizando}$$

$$(4x-1)(x-2) = 0$$

La ecuación que resulta es de la forma $(ax+b)(cx+d) = 0$

5.- Una diagonal de un polígono es un segmento de recta que une dos vértices no adyacentes. En general, el número de diagonales d, de un polígono de n lados está dado por:

$$d = \frac{n^2 - 3n}{2}.$$

Supongamos que sabemos que un polígono tiene 27 diagonales ¿cuántos lados tiene?

S*olución*: Como d = 27, sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos:

$$27 = \frac{n^2 - 3n}{2} \qquad \textit{multiplicando por } 2$$

$$54 = n^2 - 3n \qquad \textit{igualando con cero}$$

$$n^2 - 3n - 54 = 0$$

La ecuación resultante es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS. Plantea la ecuación que representa cada uno de los siguientes problemas.

1. Encuentra dos números cuya suma sea 21 y su producto 104.
2. ¿A qué tasa de interés compuesto anual se debe invertir $10,000.00 para tener $14,400.00 en dos años?
3. Dos embarcaciones se separan formando un ángulo recto, al partir al mismo tiempo del mismo embarcadero. Una hora después se han separado 13 Km. Si una de ellas viaja 7 Km/h más rápidamente que la otra ¿cuál es la velocidad de cada una?
4. Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal es cuatro unidades mayor que cualquiera de sus lados.
5. El área de un triángulo rectángulo mide 24 m^2 y la hipotenusa mide 10 m. Encuentra las longitudes de los catetos.
6. ¿Cuál es el número que excede en 72 unidades a su raíz cuadrada?
7. La suma de dos números es 42, y la diferencia de sus cuadrados es 504. ¿Cuáles son estos números?
8. Dentro de tres años la edad de un niño será cuadrado perfecto; y hace tres años su edad era precisamente la raíz de ese mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene?

9. Dos personas parten del mismo lugar y se dirigen a otro que dista del primero 12 km. la segunda persona llegó una hora antes que la primera. Calcular la velocidad de cada persona sabiendo que se diferencian en 1 km por hora.
10. Un caño tarda en llenar un depósito 2 horas más que otro. Abriendo los dos a la vez, tardan en llenarlo 1 hora 20 minutos. ¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada uno de los caños por separado.

1.2 Formas de representación.

1.2.1. Incompleta con b=0

Resolución de ecuaciones de la forma: $ax^2+c=0$

En forma general estas ecuaciones se resuelven usando las propiedades de la igualdad (despejando) o factorizando cuando se trata de una diferencia de cuadrados:

En primer lugar tomamos:

$$\begin{aligned}
ax^2+c&=0 && \textit{sumando } -c \textit{ en ambos miembros}\\
ax^2&=-c && \textit{dividiendo entre a}\\
x^2&=-\frac{c}{a} && \textit{extrayendo raíz cuadrada}\\
x&=\sqrt{-\frac{c}{a}} && si\ -\frac{c}{a}\geq 0 \textit{ la solución es real}, si -\frac{c}{a}<0, \textit{es imaginaria}
\end{aligned}$$

En segundo lugar, consideramos el caso en que a y c, tienen raíz exacta y la expresión representa una diferencia de cuadrados, tenemos

$$ax^2-c=0 \qquad \textit{factorizamos como el producto de los binomios conjugados}$$

$$\left(\sqrt{ax^2}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{ax^2}-\sqrt{c}\right)=0 \qquad \textit{se iguala cada factor con cero y se despeja x}$$

$$\left(\sqrt{ax^2}+\sqrt{c}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{a}x=-\sqrt{c} \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

$$\left(\sqrt{ax^2}-\sqrt{c}\right)=0 \Rightarrow \sqrt{a}x=\sqrt{c} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$$

EJEMPLOS. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $2x^2 - 3 = 0$

$$2x^2 - 3 = 0 \qquad \textit{dividiendo entre } 2$$
$$x^2 - \frac{3}{2} = 0 \qquad \textit{sumando } \frac{3}{2} \textit{ en ambos miembros de la igualdad}$$
$$x^2 = \frac{3}{2} \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \textit{por lo } \tan \textit{to las soluciones son}$$
$$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad y \quad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

2. $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad \textit{sumando } 4 \textit{ en ambos miembros de la igualdad}$$
$$x^2 = 4 \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = \pm 2 \qquad \textit{por lo } \tan \textit{to las soluciones son}$$
$$x_1 = 2 \quad y \quad x_2 = -2$$

3. $3x^2 - 9 = 0$

$$3x^2 - 9 = 0 \qquad \textit{sumando } 9 \textit{ en ambos lados de la igualdad}$$
$$3x^2 = 9 \qquad \textit{dividiendo entre } 3$$
$$x^2 = 3 \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = \pm\sqrt{3} \qquad \therefore \textit{las soluciones son}$$
$$x_1 = \sqrt{3} \quad y \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 1 de la sección 1.1

A un baile asistieron igual número de hombres que de mujeres. Si cada hombre bailó con todas las mujeres y cada mujer bailó con todos los hombres y en total se hicieron 225 parejas distintas. ¿Cuántas personas hubo en el baile?

$$x^2 - 900 = 0 \qquad \textit{sumando } 900$$
$$x^2 = 900 \qquad \textit{extrayendo raíz}$$
$$x = \pm 30 \qquad \textit{elegimos el valor positivo como solución}$$

Por lo tanto, en el baile hubo 30 personas.

EJERCICIOS. Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $3x^2 - 18 = 0$
2. $2x^2 - 20 = 0$
3. $4x^2 - 100 = 0$
4. $-3x^2 + 7 = 0$
5. $9x^2 + 4 = 4$

1.2.2. Incompleta con c=0

Resolución de ecuaciones de la forma: $ax^2 + bx = 0$

Estas ecuaciones se resuelven por factorización del término común x .

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx &= 0 \qquad \textit{tomando x como factor común} \\
x(ax+b) &= 0 \qquad \textit{igualando cada factor con cero y despejando} \\
x_1 &= 0 \\
ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b &\Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

EJEMPLOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 4x = 0$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x &= 0 \qquad \textit{factorizando x} \\
x(x-4) &= 0 \qquad \textit{igualando con cero cada factor} \\
x_1 &= 0 \\
x - 4 = 0 &\Rightarrow x_2 = 4
\end{aligned}
$$

2. $20x^2 - 15x = 0$

$$20x^2 - 15x = 0$$
$$5x(4x-3) = 0 \qquad \textit{factorizando } 5x$$
$$5x = 0 \quad o \quad 4x - 3 = 0 \qquad \textit{de donde}$$
$$x = 0 \quad o \quad x = \frac{3}{4}$$

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 2 de la sección 1.1

Los catetos de un triángulo rectángulo miden x y $3x+3$, la hipotenusa mide $4x-3$. ¿Cuánto mide cada cateto y la hipotenusa del triángulo?

$$6x^2 - 42x = 0 \qquad \textit{factorizando } 6x$$
$$6x(x-7) = 0 \qquad \textit{igualando cada factor con cero}$$
$$6x = 0 \quad o \quad x - 7 = 0 \qquad \textit{de donde}$$
$$x = 0 \quad o \quad x = 7 \qquad \textit{elegimos el valor positivo como solución}$$

Por lo tanto, un cateto mide 7, el otro 24 y la hipotenusa 25.

EJERCICIOS. Resolver las siguientes ecuaciones.

1. $x^2 - 6x = 0$
2. $3x^2 - 5x = 0$
3. $6x^2 + 2x = 0$
4. $-4x^2 + 2x = 0$
5. $x^2 - 2x = 0$

1.2.3. Resolución de ecuaciones de la forma $a(x+h)^2=k$:

$$a\left(x+h\right)^2 = k$$
$$\left(x+h\right)^2 = \frac{k}{a} \qquad \textit{dividiendo entre } a$$
$$x+h = \pm\sqrt{\frac{k}{a}} \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = -h \pm \sqrt{\frac{k}{a}} \qquad \textit{res}\tan\textit{do } h$$

Por lo tan*to las soluciones son*

$$x_1 = -h + \sqrt{\frac{k}{a}} \quad y$$
$$x_2 = -h - \sqrt{\frac{k}{a}}$$

EJEMPLOS. Resolver las siguientes ecuaciones

1. $2\left(x-3\right)^2 = 50$

   solución

$$\left(x-3\right)^2 = \frac{50}{2} \qquad \textit{dividiendo entre } 2$$
$$x-3 = \pm\sqrt{25} \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = 3 \pm 5 \qquad \textit{despejando}$$
$$x_1 = 3+5$$
$$x_2 = 3-5$$

   Por lo tan tanto, *la solución es* $8, -2$

2. $\left(x-5\right)^2 = 9$

   solución

$$x-5 = \pm\sqrt{9} \qquad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$
$$x = 5 \pm 3 \qquad \textit{despejando}$$
$$x_1 = 5+3$$
$$x_2 = 5-3$$

   Por lo tanto, *la solución es* $8, 2$

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 3 de la sección 1.1

Supongamos que se invierten $256.00 a una tasa de interés *r* compuesto anual. En dos años aumentará hasta $289.00. ¿Cuál es la tasa de interés?

Solución:

$289 = 256(1+r)^2$ *dividiendo entre* 256

$\frac{289}{256} = (1+r)^2$ *sacando raiz cuadrada*

$\pm\sqrt{\frac{289}{256}} = 1+r$ *despejando r*

$-1 \pm \frac{17}{16} = r$ *simplificando*

$\frac{1}{16} = r \quad o \quad -\frac{33}{16} = r$

Ya que la tasa de interés no puede ser negativa, solo $\frac{1}{16} = 0.0625$ o 6.25% es la solución.

EJERCICIOS. Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $(x-3)^2 = 16$
2. $(x+2)^2 = 7$
3. $(x-13)^2 = 64$
4. $(x+4)^2 = 36$
5. $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{121}{36}$

1.2.4. Resolución de ecuaciones de la forma $(ax+b)(cx+d)=0$

Estas ecuaciones se resuelven utilizando la propiedad del cero.

Propiedad del cero:[1]

Si *m* y *n* son números reales, entonces, *mn* = 0 si y sólo si *m* = 0 o *n* = 0

[1] Barnett. ÁLGEBRA Y TRIGONOMETRÍA, Mc Graw-Hill, 1989

$$\begin{aligned}
&Sea \quad (ax+b)(cx+d)=0 \quad entonces\\
&(ax+b)=0 \quad o \quad (cx+d)=0 \quad por\ la\ propiedad\ del\ cero\\
&ax=-b\ o \qquad cx=-d\ despejando\\
&x_1=-\frac{b}{a}\ o \qquad x_2=-\frac{d}{c}\ despejando\ x
\end{aligned}$$

EJEMPLOS. Resolver las siguientes ecuaciones

1. $(2x+3)(x-2)=0$

$$\begin{aligned}
&(2x+3)=0 \quad o \quad (x-2)=0 \quad por\ la\ propiedad\ del\ cero\\
&2x=-3\ o \qquad x=2\ despejando\\
&x_1=-\frac{3}{2}\ o \qquad x_2=2\ despejando\ x
\end{aligned}$$

2. $(x-1)(x+2)=0$

$$\begin{aligned}
&(x-1)=0 \quad o \quad (x+2)=0 \quad por\ la\ propiedad\ del\ cero\\
&x_1=1 \quad o \qquad x_2=-2\ despejando\ x
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 4 de la sección 1.1

El recíproco de un número más el doble del número es igual a $\frac{9}{2}$. Encuentra los números

La ecuación que resultó es $(4x-1)(x-2)=0$

Solución

$$\begin{aligned}
&(4x-1)=0 \quad o \quad (x-2)=0 \quad por\ la\ propiedad\ del\ cero\\
&4x=1\ o \qquad x=2\ despejando\\
&x_1=\frac{1}{4}\ o \qquad x_2=2\ despejando\ x
\end{aligned}$$

$por\ lo\ \tan to\ el\ número\ buscado\ es\ 2$

1.3. Métodos para resolución de la ecuación cuadrática completa: $ax^2+bx+c=0$

1.3.1. USANDO FACTORIZACIÓN.

Si los coeficientes $a, b\ y\ c$ son enteros, tales que $ax^2+bx+c=0$ se pueda escribir como el producto de dos factores de primer grado, con coeficientes enteros, entonces la ecuación cuadrática se puede resolver por factorización, este método se apoya en la propiedad del cero de los números reales.

Consideremos la siguiente multiplicación de binomios:
$(x+a)(x+b) = x^2 +ax +bx +ab$, que podríamos escribir de la siguiente manera
$x^2 +(a+b)x +ab$. Entonces si quisiéramos multiplicar, por ejemplo, $(x+3)(x+5)$, el resultado sería $x^2 +8x +15$; el 8 se obtuvo de sumar 5+3, y el 15 se obtuvo de multiplicar 5*3.

EJEMPLOS.

Supongamos que queremos resolver la ecuación $x^2 +5x +6 = 0$; tendríamos que buscar dos números que sumados nos dieran 5, y que multiplicados nos dieran 6. Como el resultado del producto es positivo (+6), los dos números buscados son positivos, o los dos negativos, pero como el resultado de la suma es positivo también, entonces los dos números son positivos. Así la factorización quedaría
$x^2 +5x +6 = (x +\quad)(x+\quad)$; se observa que dichos números son 2 y 3, por lo que la ecuación quedaría factorizada como $(x+2)(x+3)=0$. Para que el producto de dos factores sea cero, es porque al menos uno de ellos es cero, por lo que tendríamos que $x+2 =0$, y entonces $x=-2$; o $x+3=0$, y entonces $x=-3$, y esas serían las dos soluciones de la ecuación.
Veamos otro ejemplo: $x^2 -7x +12 = 0$.
Como el producto es positivo, los dos números buscados deben ser positivos, o ambos negativos; como la suma es negativa, entonces los dos números son

negativos, y debo buscar dos números que multiplicados den 12, y el valor absoluto de la suma sea 7 (como ambos números son negativos, al sumarlos darán como resultado un número negativo), entonces tendríamos:

x^2 -7x +12 = (x-3)(x-4), y la ecuación quedaría (x-3)(x-4) =0, por lo que las soluciones serían x=3, y x=4.

Veamos otro ejemplo:

$$x^2 +2x -15 = 0.$$

Como el producto es negativo, uno de los números debe ser negativo y el otro positivo; por lo que la factorización quedaría como x^2 +2x -15 = (x-)(x+). Como se tienen signos distintos, hay que buscar dos números que multiplicados den -15, y restados den 2 (se restan, porque tienen signos distintos). Esos números son 5 y 3; como el resultado de la suma algebraica 5 + (-3), que equivale a la resta mencionada anteriormente 5-3, es positivo (+2), quien lleva el signo "+", es el 5, ya que es mayor en valor absoluto.

Por lo que la factorización quedaría x^2 +2x -15 = (x-3)(x+5)=0. Y entonces las soluciones son x = 3, y x = -5.

Veamos el último ejemplo:

$$6x^2 -7x-3=0.$$

Si sólo consideramos el trinomio $6x^2$ -7x-3, para que no se altere el trinomio sólo podemos multiplicarlo por "uno". El uno conveniente es 6/6, ya que 6, es el coeficiente del término cuadrático.

Nos quedaría: $\frac{6(6x^2-7x-3)}{6}$, que se puede escribir como $\frac{(6x)^2-7(6x)-18}{6}$.

Esta expresión puede factorizarse como $\frac{(6x-9)(6x+2)}{6}$; (dos números que restados den 7, y multiplicados 18, ambos en valor absoluto).

La expresión anterior todavía puede expresarse como $\frac{3(2x-3)(2)(3x+1)}{6}$, que al efectuar el producto de 3 por 2, nos da 6, que al dividirse entre 6, nos da el neutro multiplicativo, o sea el 1, y el resultado final es, que $6x^2$ -7x-3 = (2x-3)(3x+1). Si igualamos a cero esta expresión, nos queda:

(2x-3)(3x+1) = 0, por lo que 2x-3 = 0, y 3x+1 = 0, y las soluciones son: x = 3/2, x = -1/3.

Recordemos que la expresión $6x^2$ -7x-3 =0, no es un trinomio aislado, sino que es una ecuación, por lo que no es necesario multiplicarla por un "uno"; podemos multiplicar toda la ecuación por 6, y quedaría: 6($6x^2$ -7x-3 =0), que daría como resultado $(6x)^2$-7(6x)-21 =0, que al factorizarla nos da (6x-9)(6x+2)=0, que por separado nos da 6x-9=0, y 6x+2=0; al resolverlas nos dan, x=9/6, o sea x=3/2, y x =-2/6, que es equivalente a x= -1/3, que son las soluciones de la ecuación original.

Sin embargo, es recomendable factorizar como al principio, ya que no sólo nos serviría para resolver ecuaciones, sino para estudios posteriores.

Vemos que el método de factorización, llega a ser un poco tedioso cuando el parámetro "a" es distinto de "1", además de que no siempre se pueden encontrar dos números que sumen y multipliquen los números buscados; y en algunos casos, aunque se pudiera factorizar una expresión como x^2 + 73x + 780 =0, en (x+60)(x+13) =0, no son evidentes o tan fáciles de encontrar dichos números. Es necesario saber otros métodos que sirvan para todos los casos.

1.3.2. Por el método de completar cuadrados.

Es posible encontrar la solución de la ecuación cuadrática general $ax^2+bx+c=0$ si puede expresarse como el cuadrado de un binomio igual a una constante. Para lograrlo se suma $-c$ a cada miembro y después se divide entre a. De este modo se obtiene

$$x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a} \qquad (1)$$

Un trinomio cuadrado con el primer coeficiente igual a 1, es un cuadrado perfecto si el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

Aplicando esto a la ecuación (1), sumamos $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ a cada miembro para lograr que el miembro izquierdo sea un cuadrado perfecto[2].

EJEMPLOS.

1.- Resolver la ecuación $x^2 + 6x = 27,$ completando el cuadrado.

Solución

$$x^2 + 6x + \left[\frac{1}{2}(6)\right]^2 = 27 + 3^2 \quad \textit{sumando la mitad del coeficiente lineal}$$

$$x^2 + 6x + 3^2 = 36 \quad \textit{simplificando}$$

$$(x+3)^2 = 6^2 \quad \textit{factorizando}$$

$$x + 3 = \pm 6 \quad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$

$$x = -3 \pm 6 \quad \textit{despejando}$$

$$x_1 = -3 + 6$$

$$x_2 = -3 - 6$$

$$\textit{Por lo tanto la solución es} \quad 3, -9$$

[2] Rees/Sparks, ÁLGEBRA CONTEMPORANEA, Mc Graw-Hill, 1995.

2.- Resolver la ecuación $3x^2 - 5x = 8$, completando el cuadrado.

$$3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right]^2 \right) = 8 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 \quad \textit{factorizando el coef. cuadrático y completando el cuadrado}$$

$$3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = 8 + \frac{25}{12} \quad \textit{factorizando y simplificando}$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{121}{36} \quad \textit{dividiendo entre } 3$$

$$\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11^2}{6^2} \quad \textit{factorizando el cociente}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm\frac{11}{6} \quad \textit{extrayendo raíz cuadrada}$$

$$x = \frac{5}{6} \pm \frac{11}{6} \quad \textit{despejando}$$

$$x_1 = \frac{5}{6} + \frac{11}{6}$$

$$x_2 = \frac{5}{6} - \frac{11}{6}$$

Por lo tanto, la solución es $\frac{8}{3}, -1$

SOLUCIÓN DEL EJEMPLO 5 de la sección 1.1

Supongamos que sabemos que un polígono tiene 27 diagonales, ¿Cuántos lados tiene?

Solución

La ecuación obtenida es $n^2-3n-54=0$

$54=n^2-3n$ *permutando los miembros de la igualdad*

$n^2-3n=54$ *sumando* $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ *en ambos miembros para completar el trinomio*

$n^2-3n+\left(\frac{3}{2}\right)^2=54+\left(\frac{3}{2}\right)^2$ *factorizando el trinomio*

$\left(n-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{225}{4}$ *sacando raiz cuadrada*

$n-\frac{3}{2}=\pm\frac{15}{2}$ *sumando* $\frac{3}{2}$ *en ambos miembros de la igualdad*

$n=\frac{3}{2}\pm\frac{15}{2}$ *tenemos*

$n_1=9$ *y* $n_2=-6$

Tomamos la solución positiva y *entonces, el polígono tiene* 9 *lados.*

EJERCICIOS. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados

1. $2x^2-3x-2=0$
2. $x^2-5x+6=0$
3. $x^2+6x+5=0$
4. $x^2+5x+6=0$
5. $x^2-x-2=0$

1.3.3. Por fórmula general.

Si utilizamos el método de completar cuadrados para resolver una ecuación cuadrática completa, podemos encontrar una fórmula para resolverlas.

Tenemos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad con \quad a \neq 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad dividiendo\ entre\ a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad sumando\ -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad sumando \left(\frac{b}{2a}\right)^2 a\ ambos\ miembros$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{b} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad factorizando\ el\ trinomio$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad resolviendo\ las\ operaciones$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad extrayendo\ raíz\ cuadrada$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad despejando\ x$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad simplificando$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b - 4ac}}{2a} \qquad resolviendo$$

Fórmula cuadrática en una variable[3]
Si $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$ *entonces* $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *da las soluciones de la ecuación cuadrática.*

[3] Idem 1

EJEMPLOS.

Resolver la siguiente ecuación.

1. $9x^2-6x+1=0$

Solución

como $a=9, \quad b=-6 \quad y \quad c=1$

sustituyendo en la fórmula general tenemos

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(9)(1)}}{2(9)}$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{18} \qquad \textit{simplificando}$$

$$x=\frac{6\pm 0}{18}$$

$$x=\frac{1}{3}$$

Por lo tanto la solución es $x=\frac{1}{3}$

EJERCICIOS. Resolver las siguientes ecuaciones usando fórmula general

1. $8x^2+10x-7=0$
2. $x^2-x-6=0$
3. $x^2-10x+22=0$
4. $3x^2-x-4=0$
5. $3x^2+2x-8=0$

1.3.4. Análisis del discriminante: b^2-4ac.

Algunas ecuaciones cuadráticas tienen dos, una o ninguna solución real. El objetivo de analizar el discriminante es encontrar el número de soluciones de una ecuación cuadrática con $x\epsilon P$

La expresión que está bajo el radical en la fórmula general (b^2-4ac), se llama ***discriminante.***

1.3.4.1. El número *i*.

En la sección 5.2 se estableció que una ecuación cuadrática puede escribirse de la forma $(x+h)^2 = k$ y que sus raíces son $x = -h \pm \sqrt{k}$. Si k es un número negativo, entonces $\sqrt{k}$ no es un número real, ya que el cuadrado de un número real diferente de cero es un número positivo.

Por lo anterior, el número i, se define como: $i^2 = -1, \quad entonces \quad i = \sqrt{-1}.$
Así, n >0, se define $\sqrt{-n} = \sqrt{-1}\sqrt{n}$ en donde $i \quad representa \quad \sqrt{-1}.$

Luego, $\sqrt{-n} = i\sqrt{n} \quad con \quad n$ >0.

Definición[4]:
Un número de la forma $a+bi, \quad con \quad a \ y \ b \in \mathbb{R}, \quad se\ llama\ número\ complejo.$

Es interesante notar que:

$$i^2 = -1, i^3 = i^2 i = -i, i^4 = \left(i^2\right)^2 = (-1)^2 = 1. \ Así\ que\ i^5 = i \ y \ i^6 = i^2.$$

1.3.4.2. Raíces dobles.

Cuando una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
se puede factorizar como el producto de dos binomios iguales, es decir;

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2}\right) \quad o \quad ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

se dice que la ecuación tiene una raíz doble.

Esto sucede cuando la expresión algebraica $ax^2 + bx + c$ representa un trinomio cuadrado perfecto.

[4] Idem (3)

1.4. Tipos de raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$

La siguiente tabla ilustra los tres casos posibles de soluciones.

En ella se puede observar que:

a) Cuando el valor del discriminante es positivo, se tienen dos soluciones reales y la gráfica interseca en dos puntos el eje de las abscisas ó "X".

b) Cuando es cero, tiene una solución y la gráfica toca solo un punto en el eje de las Abscisas ó "X".

c) Cuando es negativo, no hay soluciones reales y la gráfica no interseca el eje de las abscisas ó "X".

Raíces de $ax^2+bx+c=0$	Discriminante
Dos raíces o soluciones reales	$b^2-4ac>0$
Una raíz o solución real	$b^2-4ac=0$
Cero soluciones reales	$b^2-4ac<0$

Respuestas a ejercicios.

Respuesta a los problemas de aplicación de ecuaciones cuadráticas

1) 8 y 13) 2) al 20%). 3) 5 y 12 Km/h. 4) $48+32\sqrt{2}\approx 93.25u^2$ 5) 6 y 8 metros
6. Sol (81) 7. Sol. (27 y 15) 8. Sol (6) 9. Sol. (3 km/h y 4 km/h) 10. Sol. (2 horas y 4 horas)

Respuesta a los ejercicios de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2+c=0$

$1.\ sol\sqrt{6}, -\sqrt{6}\quad 2.\ sol\sqrt{10}, -\sqrt{10}\quad 3.\ sol 5, -5\quad 4. sol\ \frac{\sqrt{21}}{3}, -\frac{\sqrt{21}}{3}\quad 5.\ sol \rightarrow 0$

Respuesta a los ejercicios de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2+bx=0$

$1.\ sol\ 0{,}6\quad 2.\ sol\ 0, \frac{5}{3}\quad 3.\ sol\ 0, -\frac{1}{3}\quad 4.\ sol\ 0, \frac{1}{2}\quad 5.\ sol 0, 2$

Respuesta a los ejercicios de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $a(x+h)^2=k$

$1.\ sol\ 7, -1\quad 2.\ sol\ -2+\sqrt{7}, -2-\sqrt{7}\quad 3.\ sol\ 21, 5\quad 4.\ sol\ 2, -10\quad 5.\ sol\ \frac{8}{3}, -1$

Respuesta a los ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2+bx+c=0$ completando trinomio cuadrado perfecto

$1.\ sol -\frac{1}{2}, 2\quad 2.\ sol 2, 3\quad 3.\ sol -5, -1\quad 4.\ sol -3, -2\quad 5.\ sol -1, 2$

Respuesta a los ejercicios de ecuaciones cuadráticas completas de la forma $ax^2+bx+c=0$ por fórmula general.

$1.\ sol -\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\quad 2.\ sol -2, 3\quad 3.\ sol 5+\sqrt{3}, 5-\sqrt{3}\quad 4.\ sol -1, \frac{4}{3}\quad 5.\ sol -2, \frac{4}{3}$

UNIDAD II. FUNCIONES CUADRÁTICAS.

PROPÓSITO DE LA UNIDAD: Al finalizar la unidad el alumnado, analizará el comportamiento de las funciones cuadráticas en términos de sus parámetros mediante la contrastación de la representación gráfica y analítica. Resolverá problemas de optimización con métodos algebraicos, a fin de continuar con el estudio de las funciones a partir de situaciones que varían en forma cuadrática y contrastará este tipo de variación con la lineal.

APRENDIZAJES.

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Obtendrá el modelo de la función cuadrática de una situación dada.
- Reconocerá en una tabla si existe variación cuadrática por medio de diferencias finitas. Identificará las diferencias entre variación lineal y cuadrática.
- Interpretará el comportamiento de la gráfica y los parámetros de la expresión algebraica, dentro del contexto de una situación dada.
- Relacionará el número de intersecciones de la curva de una función cuadrática con el eje X, con la naturaleza de las raíces. En particular, identificará su ausencia con la existencia de raíces complejas.
- El alumno expresará la función $y=ax^2 + bx + c$ en la forma estándar $y=a(x-h)^2+k$, usando el método de completar un trinomio cuadrado perfecto. Además, interpretará el impacto de sus parámetros en el registro gráfico.
- El alumno comprenderá los términos de concavidad, vértice, máximo, mínimo y simetría.
- Resolverá problemas sencillos de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para iniciar con el estudio de la función cuadrática, comenzaremos a analizar el siguiente problema:

- Un granjero tiene 120 metros de malla de alambre y con ello desea cercar un terreno de forma rectangular. ¿Cuál es la expresión que representa el área? ¿Cuál es el área máxima del terreno?

Solución:

Recuerda que un rectángulo es una figura que tiene dos pares de lados iguales, una base y una altura, por lo tanto es conveniente realizar un dibujo del mismo:
Recuerda: el perímetro del rectángulo es $P = 2b + 2h$

El área $A = (b)(h)$

h

b

Una vez que se han establecido los elementos necesarios en el problema, ¿cómo podemos relacionar esos datos?

Lo primero que podemos hacer es determinar el perímetro del terreno, puesto que se sabe que la malla con la que será cercada es de 120 metros, por lo tanto podemos establecer que:
$2b + 2h = 120$

Una vez relacionado este dato, ahora buscaremos la forma de relacionarlo con la pregunta que nos hace el problema ¿Cuál será el área máxima que se puede cercar con los 120 m?

Recuerda que para encontrar el área de un rectángulo basta con multiplicar la base b por la altura h, sin embargo, la simple expresión no soluciona el problema, por lo que tenemos que relacionarlo con el perímetro, para lo cual vamos a despejar una de las variables involucradas, en este caso despejaremos a b, por lo que tenemos:

$$2b = 120 - 2h$$

$$b = \frac{120 - 2h}{2}$$

$$b = 60 - h$$

Una vez despejada la base b, lo que procederemos a hacer es sustituirla en la fórmula del área, para lo cual tenemos lo siguiente:

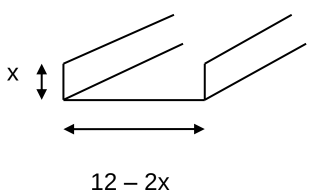
$$A = (b)(h)$$
$$A = (60 - h)(h)$$
$$A(h) = 60h - h^2$$

Esta expresión que acabamos de determinar muestra el área del rectángulo en función de la altura h, es decir, si le damos un valor de altura, podremos encontrar un valor de área, lo cual representa parte de la solución del problema. La segunda pregunta del problema será analizada más adelante.

Analicemos el siguiente problema:

- A partir de una hoja rectangular de metal de 12 pulgadas de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia, doblando hacia arriba dos lados de manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuál es la expresión que representa la capacidad que puede tener el canalón? ¿Cuántas pulgadas se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

Solución.
Lo primero que tenemos que realizar es un dibujo que represente la situación.



Como puedes observar lo que se desconoce es la magnitud del doblez para que el canalón tenga el área máxima.

Observa también la figura que se forma en el canalón es un rectángulo, por lo que la capacidad del canalón depende del área máxima que se obtenga del rectángulo, por lo que, tomando en cuenta las medidas establecidas en el dibujo se tiene lo siguiente:

$$A = (b)(h)$$
$$A = (12 - 2x)(x)$$
$$A(x) = 12x - 2x^2$$

La expresión obtenida nos servirá para contestar la segunda pregunta del problema, la cual retomaremos más adelante.

Trabajemos el siguiente ejemplo:

- ¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto de dos números cuya suma es 46? Y ¿Cuáles son esos números?

Solución:
Primero representaremos la suma de dos números cuyo resultado sea 46, la cual puede ser:
$a+b=46$
Ahora, el producto de ambos números esta representado por:

$$P=(a)(b)$$

Para poder determinar un modelo algebraico que represente el producto de esos dos números, ahora necesitamos que el producto se encuentre sólo en función de uno de los números, por lo que se necesita despejar a uno de los números, teniendo:

$$a=46-b$$

Sustituyendo esta última expresión en el producto se tiene lo siguiente:

$$P=(46-b)(b)$$

$$P(b)=46b-b^2$$

$$P(b)=-b^2+46b$$

La expresión obtenida representa el producto de esos dos números, y con ella determinaremos el valor de dichos números, para lo cual lo retomaremos más adelante.

Por último, se tiene el siguiente problema:

- ¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto de dos números cuya diferencia es 6? ¿Cuáles son esos números?

Solución:

Al igual que en el problema anterior, lo primero que hay que establecer es la diferencia de dos números, cuyo resultado es 6, por lo tanto, tenemos que:

$$x-y=6$$

Una vez establecida la diferencia, entonces plantearemos el producto de ambos números, el cual quedaría de la siguiente manera:

$$P=(x)(y)$$

Para relacionar ambas expresiones realizaremos el despeje siguiente:

$$x=6+y$$

Procederemos a sustituirlo en la expresión correspondiente al producto, quedando de la siguiente manera:

$$P = (6 + y)(y)$$
$$P(y) = 6y + y^2$$
$$P(y) = y^2 + 6y$$

La expresión obtenida representa el producto de los números, y con ella podremos determinar el valor de los números, pero antes de responder a cada uno de los problemas anteriores recordaremos a la función cuadrática.

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Las expresiones determinadas en cada uno de los problemas anteriores se clasifican como funciones cuadráticas, las cuales se definen como aquellas cuyos valores están dados por un polinomio cuadrático de la forma:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

Donde *a, b* y *c* son números reales y *a* es diferente de cero.

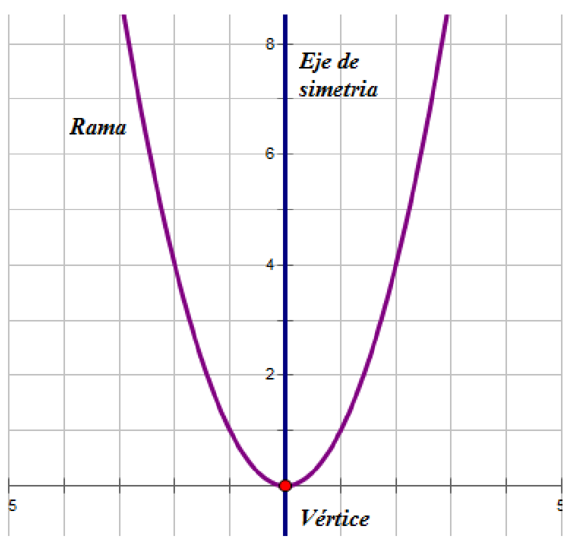
Esta forma de representar a una función cuadrática se le conoce como la forma general, además de que cabe aclarar que algunos libros de texto utilizan a *y* en vez de *f(x)* lo cual es correcto.

Otra forma de representar a una función cuadrática es de la siguiente manera:

$f(x) = a(x - h)^2 + k$

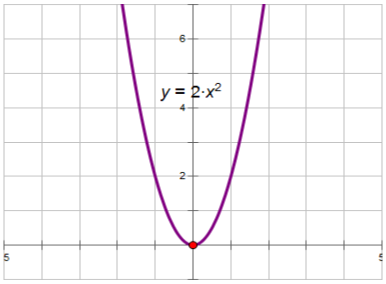
La cual es conocida como la forma estándar u ordinaria de la función cuadrática y donde también debe de cumplirse que *a* sea diferente de cero.

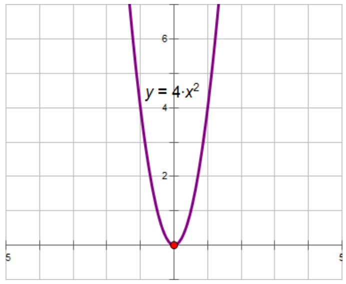
La gráfica resultante de una función cuadrática es una parábola, con eje de simetría vertical, la cual cuenta con los elementos indicados en la siguiente gráfica:

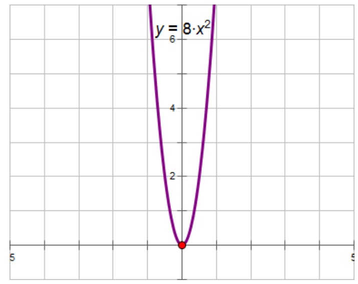


La gráfica de una parábola será modificada según el valor de los parámetros *a, h* y *k.*
Veamos el efecto de cada uno de ellos.

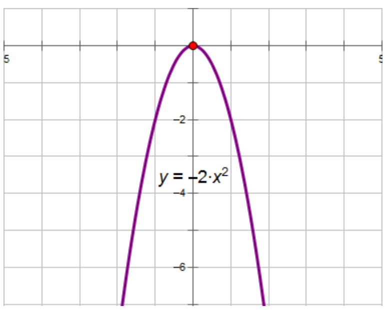
En primera instancia, analizaremos el parámetro *a*, observa las siguientes graficas:

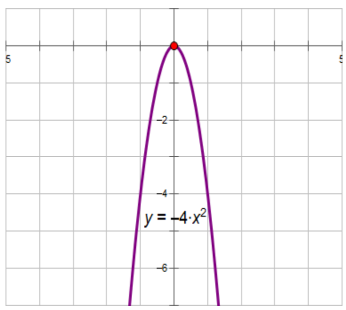


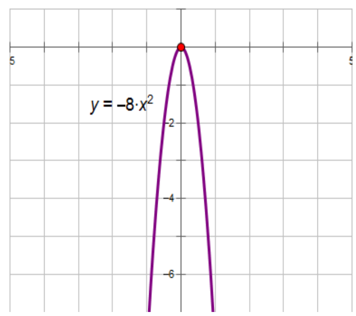




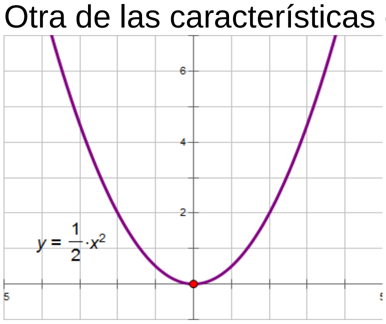
Observa que si el parámetro *a* es positivo, la parábola abre hacia arriba, es decir, tiene concavidad positiva, además observa que entre más grande sea el valor de *a* la parábola se alarga cada vez mas.

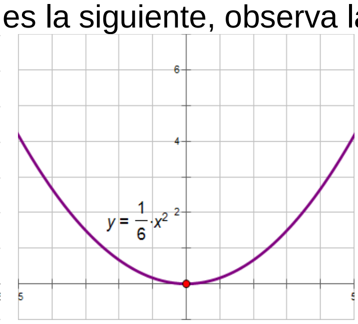


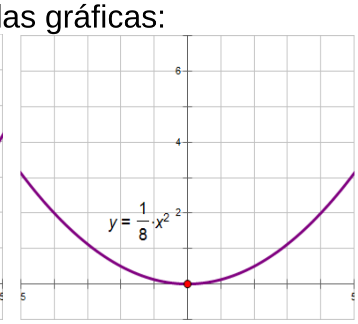




Observa ahora, cuando el valor de *a* es negativo la parábola abre hacia abajo, es decir tiene concavidad negativa.
Otra de las características es la siguiente, observa las gráficas:

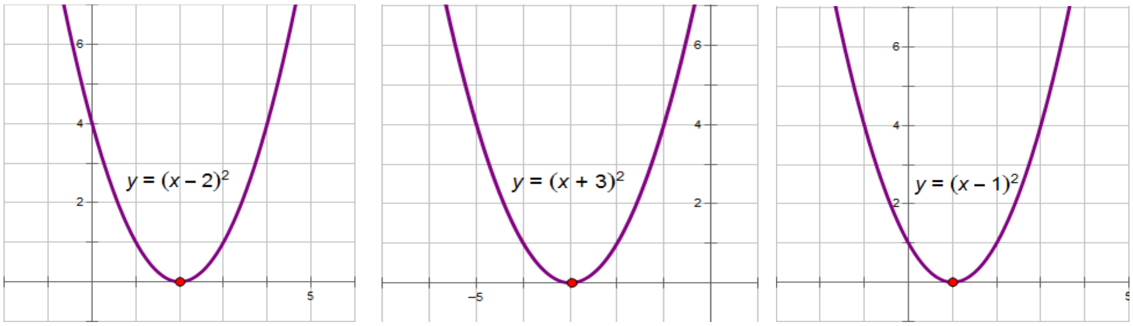






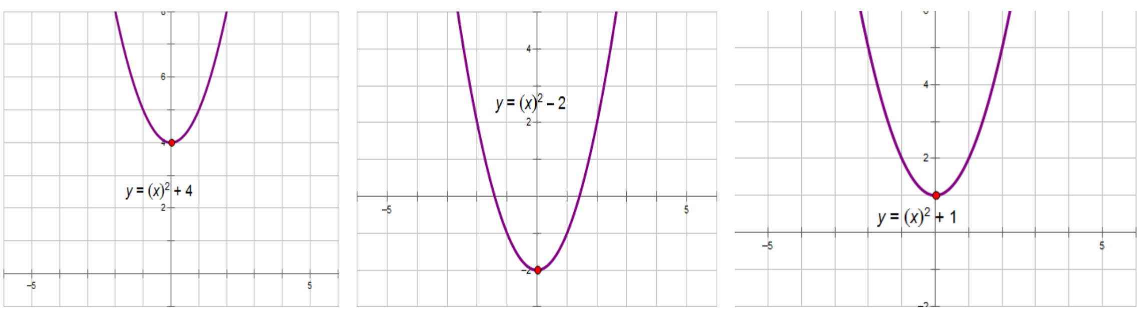
Como puedes observar en las gráficas entre más pequeño sea el valor del parámetro *a* ocasiona que la parábola se haga cada vez más ancha.

Una vez analizado el parámetro *a* procederemos a analizar el parámetro *h*, para lo cual observa y analiza las siguientes gráficas:



Como puedes observar en las gráficas, el parámetro *h* ocasiona un desplazamiento horizontal de la parábola; es decir, se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda contrario al valor que se le está sumando o restando.

Por último, analizaremos el parámetro *k*, observa las siguientes graficas:



Observa en las gráficas que el parámetro *k* lo que ocasiona es un desplazamiento vertical de la parábola, se recorre tanta unidades como lo indique el valor de *k*.

En resumen:

- El parámetro *a* nos indica la concavidad de la parábola, si es positivo abre hacia arriba, si es negativo abre hacia abajo. Además de indicarnos si es delgada y alargada o ancha, dependiendo del valor que tenga.
- El parámetro *h* provoca un desplazamiento horizontal contrario al signo del mismo.
- El parámetro *k* desplaza a la parábola verticalmente tantas unidades como lo indique el valor del mismo.
- Observa que el vértice de la parábola se forma con los valores de los parámetros (*h, k*)
- Además, la ecuación que representa al eje de simetría es $x = h$

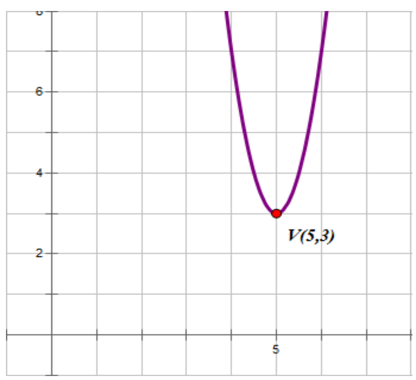
Ya que se realizó el análisis por separado de los tres parámetros, ahora analizaremos los tres en conjunto; es decir, realizaremos un bosquejo de la gráfica únicamente utilizando los parámetros.

Se tiene la siguiente función:

$$f(x) = 4(x-5)^2 + 3$$

Lo primero que debemos hacer es identificar a cada uno de los parámetros:
a = 4, lo que ocasiona que la parábola tenga concavidad positiva y sea alargada.
h = 5, lo cual ocasiona un desplazamiento horizontal de cinco unidades hacia la derecha.
k = 3, lo cual ocasiona un desplazamiento hacia arriba de tres unidades.

Con los valores de *h* y *k* podemos identificar el vértice el cual se encuentra en el punto (5, 3).
Ahora si, podemos realizar el bosquejo de la gráfica, el cual queda de la siguiente manera:



Serie de Ejercicios A.

Realiza el bosquejo de las siguientes parábolas analizando los parámetros.

a) $f(x) = 6x^2$
b) $f(x) = -4x^2$
c) $f(x) = x^2 - 5$
d) $f(x) = -x^2 + 2$
e) $f(x) = (x+6)^2$
f) $f(x) = -(x-4)^2$
g) $f(x) = -2(x+3)^2 - 1$
h) $f(x) = 8(x+1)^2 - 6$
i) $f(x) = -(x+4)^2 + 2$
j) $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 + 3$

Ya que fueron analizados los parámetros, y una vez que observaste que la función cuadrática en su forma ordinaria proporciona directamente el vértice y la concavidad ahora vamos a realizar la transición entre el registro ordinario al registro general.

Trabajemos con el ejemplo anterior, tenemos la función:

$$f(x) = 4(x-5)^2 + 3$$

Lo primero que tenemos que hacer es desarrollar el binomio al cuadrado, por lo que tenemos:

$$f(x) = 4(x^2 - 10x + 25) + 3$$

Realizando las operaciones pertinentes y agrupando términos:

$$f(x) = 4(x^2 - 10x + 25) + 3$$
$$f(x) = 4x^2 - 40x + 100 + 3$$
$$f(x) = 4x^2 - 40x + 103$$

Obteniendo la función cuadrática en su forma general.

Veamos otro ejemplo:

$$f(x) = -2(x+3)^2 - 5$$

Desarrollando el binomio se tiene:

$$f(x) = -2(x^2 + 6x + 9) - 5$$

Realizando las operaciones pertinentes se tiene:

$$f(x) = -2(x^2 + 6x + 9) - 5$$
$$f(x) = -2x^2 - 12x - 18 - 5$$
$$f(x) = -2x^2 - 12x - 23$$

Obteniendo la función cuadrática en su forma general.

Serie de Ejercicios B:

Determina la función cuadrática en su forma general en cada uno de los siguientes incisos.

a) $f(x) = -3(x+7)^2 + 5$
b) $f(x) = 4(x+9)^2 - 1$
c) $f(x) = -10(x-8)^2 + 4$
d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 2$
e) $f(x) = -\frac{1}{3}(x+9)^2$

Una vez que ya observaste como es que se realiza la transición entre el registro ordinario y general, ahora realizaremos el proceso inverso, es decir, pasaremos la función de su registro general al ordinario.
Veamos el siguiente ejemplo:
Tenemos la función:

$$f(x) = 2x^2 + 20x + 46$$

Lo primero que tenemos que hacer es que el término cuadrático tenga como coeficiente uno positivo, debido a que tenemos que completar un trinomio cuadrado perfecto, para la cual vamos a factorizar al término cuadrático y al lineal de la siguiente manera:

$$f(x) = 2x^2 + 20x + 46$$
$$f(x) = 2(x^2 + 10x) + 46$$

Una vez que tenemos al término cuadrático con coeficiente uno positivo y al término lineal, procederemos a completar el TCP, por lo que tenemos que obtener la mitad del término lineal y elevarla al cuadrado para integrarlas a la expresión de la siguiente manera:

$$f(x) = 2(x^2 + 10x) + 46$$
$$f(x) = 2(x^2 + 10x + 25) + 46 - 25(2)$$

Una vez completado el TCP procederemos a factorizarlo y a realizar las operaciones pertinentes, de tal manera que:

$$f(x) = 2(x^2 + 10x + 25) + 46 - 25(2)$$
$$f(x) = 2(x+5)^2 + 46 - 50$$
$$f(x) = 2(x+5)^2 - 4$$

Resultando entonces la función cuadrática en su forma ordinaria, la cual nos proporciona el vértice y la concavidad de la parábola.

¿Cuáles son las coordenadas del vértice? _____________
¿Hacia dónde abre la parábola?_________________________________
¿Cuál es la ecuación del eje de simetría?___________________________

Trabajemos el siguiente ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$

Observa que la ecuación ya tiene el término cuadrático con coeficiente uno positivo, por lo tanto podemos completar directamente el TCP, de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2 + 6x + 8$$
$$f(x) = x^2 + 6x + 9 + 8 - 9$$

Factorizando y realizando las operaciones pertinentes tenemos:

$$f(x) = x^2 + 6x + 9 + 8 - 9$$
$$f(x) = (x+3)^2 + 8 - 9$$
$$f(x) = (x+3)^2 - 1$$

Resultando la función en su forma ordinaria.

¿Cuáles son las coordenadas del vértice? ______
¿Hacia dónde abre la parábola?___________________

Serie de ejercicios C:
Representa, en su forma ordinaria, cada una de las siguientes parábolas:

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$
b) $f(x) = -x^2 + 6x + 8$
c) $f(x) = -x^2 + 6x - 2$
d) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$
e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

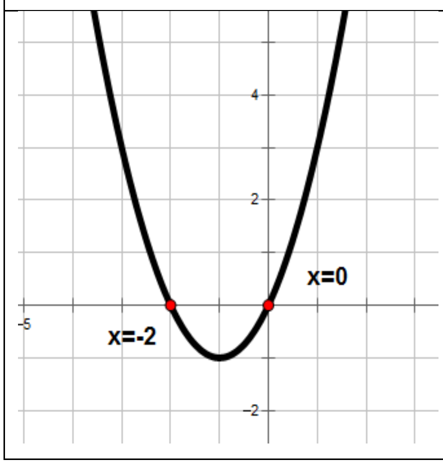
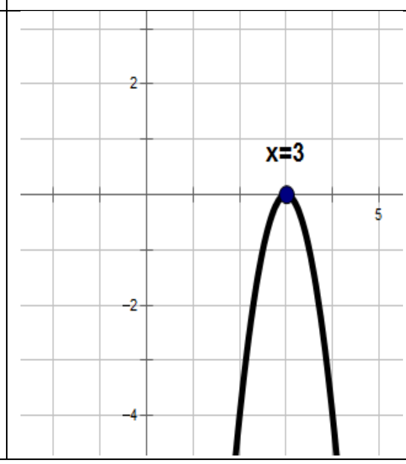
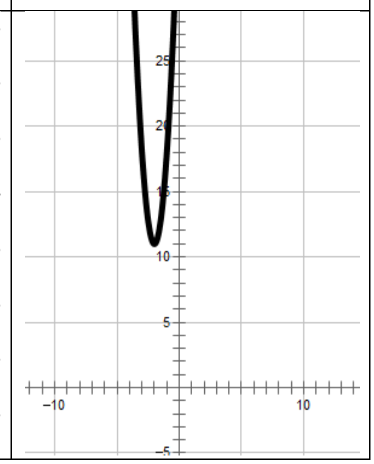
Pero ¿para qué sirve realizar la transición entre el registro general y el registro ordinario?

Recuerda que el registro ordinario te proporciona el vértice y la concavidad, y el registro general te permite conocer las raíces de la ecuación (las intersecciones de la parábola con el eje de las abscisas).

Veamos cómo se obtienen estas intersecciones.

Los puntos de intersección de la parábola con el eje de las abscisas (eje x), se pueden determinar (si es que son reales) cuando se tiene que y = 0; es decir la función cuadrática se iguala a cero y se resuelve la ecuación cuadrática resultante.

Al resolver la ecuación cuadrática, se determinan sus raíces las cuales representan gráficamente las intersecciones con el eje x; de lo cual se puede obtener:

Dos raíces reales desiguales: dos intersecciones	Dos raíces reales iguales: una intersección	Dos raíces imaginarias: ninguna intersección.
		

Ejemplo 1.

Para determinar las intersecciones de la función $y = x^2 + 2x - 15$; se iguala y = 0 y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 2x - 15 = 0$

Los métodos para resolver una ecuación cuadrática son: Fórmula General, Factorización y Completar un TCP.

Utilizando la fórmula general para resolver la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$

Se tiene que: a = 1 b = 2 c = -15

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -5$$

Por lo tanto las intersecciones de la parábola con el eje *x* son $x_1=3$ y $x_2 = -5$.

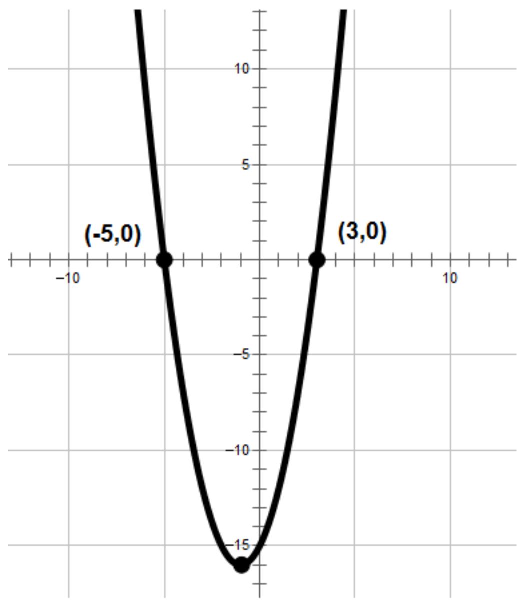
Para graficar la parábola se necesita el vértice; por lo que hay que determinar la función en su forma ordinaria.

$$y = x^2 + 2x - 15$$

$$y = (x^2 + 2x + 1) - 15 - 1$$

$$y = (x+1)^2 - 16$$

Con el vértice (-1,-16), la concavidad positiva (la parábola abre hacia arriba) y las intersecciones $x_1=3$ y $x_2 = -5$ se puede trazar la parábola.



Ejemplo 2.

Para determinar las intersecciones de la función $y = 7x^2 + 28x + 39$; se iguala y = 0 y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $7x^2 + 28x + 39 = 0$

Utilizando la fórmula general para resolver la ecuación $7x^2 + 28x + 39 = 0$

Se tiene que: a = 7 b = 28 c= 39

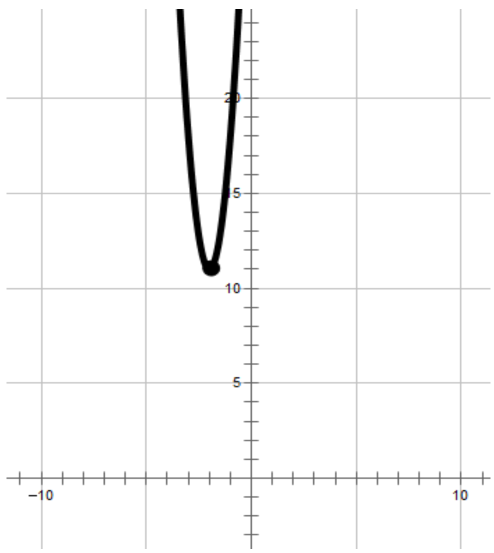
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-28 \pm \sqrt{(28)^2 - 4(7)(39)}}{2(7)}$$

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{784-1092}}{14} = \frac{-28 \pm \sqrt{-308}}{14}$$
$$x_1 = imaginaria$$
$$x_2 = imaginaria$$

Por lo tanto la parábola no tiene intersecciones con el eje x.
Para graficar la parábola se necesita el vértice; por lo que hay que determinar la función en su forma ordinaria.

$$y = 7x^2 + 28x + 39$$
$$y = 7(x^2 + 4x + 4) + 39 - 28$$
$$y = 7(x+2)^2 + 11$$

Con el vértice (-2, 11) y la concavidad (positiva la parábola abre hacia arriba) se puede trazar la parábola.



Ejemplo 3.

Para determinar las intersecciones de la función $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ (Forma Ordinaria);

se iguala y=0 y se obtiene la siguiente ecuación cuadrática: $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

Para determinar las raíces de la ecuación solo se despeja *x*.

$$4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$$

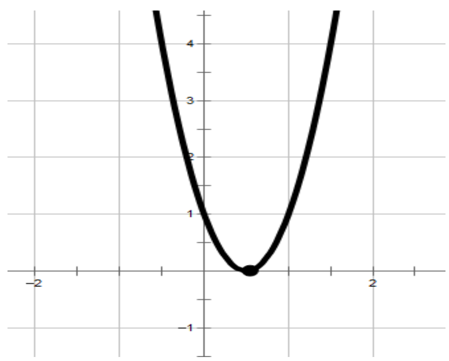
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{0}{4}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{0}$$

$$x-\frac{1}{2}=0$$

$x_1=\frac{1}{2}$ y $x_2=\frac{1}{2}$ es decir las dos raíces de la ecuación son iguales; solo hay una intersección con el eje x.

Con el vértice $\left(\frac{1}{2},0\right)$, la concavidad positiva (la parábola abre hacia arriba) y la intersección $x=\frac{1}{2}$ se traza la parábola.



Serie de Ejercicios D:

Determina el vértice, la concavidad, la ecuación del eje de simetría, las raíces y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=x^2+6x-16$

b) $y=-x^2+6x+18$

c) $y=-4x^2+24x-36$

d) $y=x^2+2x+1$

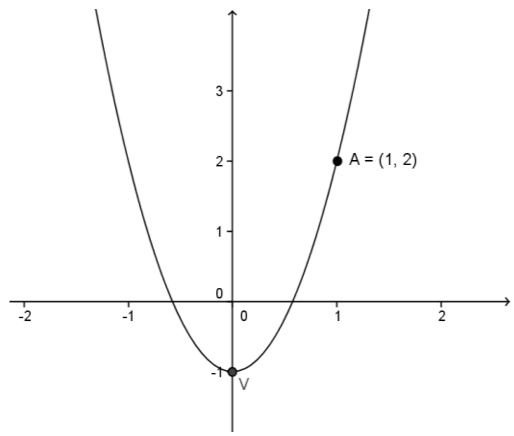
e) $y=(x+1)^2-1$

f) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-2$

g) $y=-8(x+1)^2+6$

Es importante recalcar que también podemos determinar la función cuadrática a partir de su gráfica, la cual se obtiene de la siguiente manera:

De la gráfica:



Podemos obtener información de la gráfica que nos permitirá obtener la función correspondiente, por ejemplo, observa que el vértice se encuentra en el punto $(0,-1)$ lo cual significa que el valor de *h = 0* y el valor de *k = -1.*
Por otro lado, observa que el punto $(1,2)$ pertenece a la parábola, de tal manera que conocemos los valores *x =1, y =2.*

Como recordaras, función cuadrática tiene la forma: $f(x)=a(x-h)^2+k$, para establecer la función asociada a la gráfica procederemos a sustituir los elementos que conocemos, los cuales son:
h = 0, k =- 1, x = 1, y = 2, recuerda que se estableció anteriormente que *f(x)* es lo mismo que *y* , con lo que se tiene:

$$2=a(1-0)^2+(-1)$$

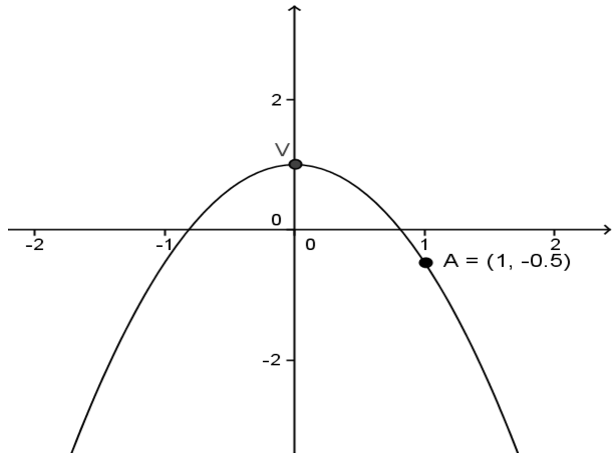
Como puedes observar, falta determinar el valor de *a*, para lo cual procederemos a despejarla:

$$2=a(1)^2-1$$
$$2+1=a$$
$$3=a$$

Una vez determinado el valor del parámetro *a*, y conocidos los parámetros *h* y *k*, entonces podemos establecer la función buscada, quedando:

$$y=3(x-0)^2+(-1)$$
$$y=3x^2-1$$

Una vez que observaste como es que se obtiene, inténtalo tú. Obtén la gráfica de la función cuya grafica es:



PROBLEMAS DE APLICACION

Por último, retomemos los problemas que trabajamos al inicio de la unidad, ya que dejamos pendiente una de las preguntas de cada problema.

Del problema:

- Un granjero tiene 120 metros de malla de alambre y con ello desea cercar un terreno de forma rectangular. ¿Cuál es la expresión que representa el área máxima? ¿Cuál es el área máxima del terreno?

La expresión que representa el área máxima es $A(h) = 60h - h^2$

Observa que la expresión encontrada es una función cuadrática en forma general. Para contestar a la segunda pregunta lo que necesitamos hacer es obtener la gráfica de dicha función, para ello tenemos que transitar a su forma ordinaria, con lo cual encontraremos el vértice. Por lo que:

$$A(h) = -h^2 + 60h$$
$$A(h) = -(h^2 - 60h)$$
$$A(h) = -(h^2 - 60h + 900) - 900(-1)$$
$$A(h) = -(h - 30)^2 + 900$$

Como puedes apreciar se trata de una parábola cuya concavidad es negativa, es decir, abre hacia abajo y cuyo vértice se encuentra en el punto V (30, 900).
También podemos determinar el valor de las raíces, igualando la función con cero y resolviendo la ecuación resultante, de tal manera que:

$$-h^2 + 60h = 0$$
$$FACTORIZANDO$$
$$h(-h + 60) = 0$$
$$donde$$
$$h_1 = 0$$
$$Ademas$$
$$-h + 60 = 0$$
$$-h = -60$$
$$h_2 = 60$$

En resumen, tenemos una parábola que abre hacia abajo y cuyo vértice esta en el punto (30, 900) con lo cual obtenemos un valor de h = 30m y un valor de área ocasionado por este valor h, el cual es Área =900 m^2, la cual es el área máxima que puede tener el terreno.

Concluyamos el segundo problema:

- A partir de una hoja rectangular de metal de 12 pulgadas de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia, doblando hacia arriba dos lados de manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuál es la expresión que representa la capacidad máxima que puede tener el canalón? ¿Cuántas pulgadas se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

La expresión que representa el área máxima es: $A(x) = -2x^2 + 12x$

Ahora lo que hay que determinar es el valor de x que origina que el canalón tenga capacidad máxima, para lo cual transitaremos de la forma general a la forma ordinaria, de tal manera que:

$$A(x) = -2x^2 + 12x$$
$$A(x) = -2(x^2 - 6x)$$
$$A(x) = -2(x^2 - 6x + 9) - 9(-2)$$
$$A(x) = -2(x-3)^2 + 18$$

Como puedes observar, el vértice de la parábola que representa el problema es (3,18), el cual brinda la información necesaria para responder a la pregunta del problema.

Cuando se dobla 3 pulgadas hacia arriba las paredes del canalón, este tiene una capacidad máxima de 18 plg^2.

Del tercer problema:

- ¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto máximo de dos números cuya suma es 46? Y ¿Cuáles son esos números?

La expresión algebraica obtenida fue la función cuadrática: $P(b) = -b^2 + 46b$
Observa que la expresión representa el producto en función de *b*, por lo que para determinar cuáles son los números que originan el producto máximo ser necesario obtener la forma ordinaria de la función, de tal manera que:

$$P(b) = -b^2 + 46b$$
$$P(b) = -(b^2 - 46b)$$
$$P(b) = -(b^2 - 46b + 529) - 529(-1)$$
$$P(b) = -(b-23)^2 + 529$$

Observa que el vértice de la parábola se encuentra en (23,529), el cual brinda la información necesaria para resolver el problema, el valor de *b* es 23, y ese valor origina un producto máximo de 529.
Con ese valor de *b* se puede obtener el valor de *a* obtenlo.

Por último, del problema:

- ¿Cuál es el modelo algebraico que representa el producto mínimo de dos números cuya diferencia es 6? ¿Cuáles son esos números?

La expresión que se obtuvo fue: $P(y) = y^2 + 6y$

Para determinar cuál es el producto mínimo, tendremos que obtener el vértice de la función cuadrática obtenida, de tal manera que:

$$P(y) = y^2 + 6y$$
$$P(y) = y^2 + 6y + 9 - 9$$
$$P(y) = (y+3)^2 - 9$$

El vértice de la parábola se encuentra en (-3,-9), con lo cual podemos responder a la pregunta pendiente del problema, el valor de y = -3, ocasiona un producto mínimo igual a -9, con el valor de *y* obtenido puedes obtener el valor de *a*, obtenlo.

Resuelve los siguientes problemas:

1.- A partir de una hoja rectangular de metal de 12 pulgadas de ancho, se desea construir un canalón para desaguar la lluvia, se doblan hacía dos lados de tal manera que queden perpendiculares a la hoja. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la capacidad máxima (área transversal máxima) que puede desalojar el canalón? ¿Cuántas pulgadas se deben doblar para que el canalón tenga capacidad máxima?

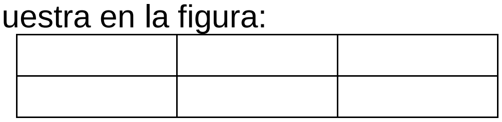
2.- Una persona que se encuentra en la parte más alta de un edificio lanza hacia arriba un objeto. Después de t segundos, la altura del objeto respecto al suelo en pies está dada por $s(t) = -16t^2 + 144t + 100$, ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el objeto? ¿Cuál es la altura del edificio?

3.- Se requiere cercar un corral de forma rectangular, utilizando una barda de piedra como uno de los lados más largos del rectángulo, para realizar el trabajo se cuenta con un rollo de malla ciclónica de 1000 metros de longitud. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área del corral? ¿Cuál es el área máxima que se puede cercar?

4.- A un tiempo cero (t = 0) un clavadista se impulsa a una velocidad de 16 pies/seg, desde una plataforma que se encuentra a una altura (s) de 32 pies sobre el agua. La función que define la trayectoria del clavadista es $s(t) = -16t^2 + 16t + 32$.
a) ¿Cuánto tiempo le toca al clavadista alcanzar la altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el clavadista?
c) ¿Cuándo el clavadista toca o llega al agua?
d) ¿A qué altura se encontraba el clavadista después de un segundo de haberse lanzado?

5.- La fórmula $h = 128t - 16t^2$ expresa la altura h en metros desde el piso, que alcanza un objeto en t segundos después de ser lanzado. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el objeto? ¿Cuánto tarda en llegar a su altura máxima? ¿Cuánto tarda en regresar al piso contando desde que fue arrojado? ¿En cuántos segundos se encontrará el objeto a una altura de 192 m? Elaborar un bosquejo de la gráfica

6.- Se quieren construir con 300 metros de alambre seis jaulas de forma rectangular como se muestra en la figura:



¿Qué medidas debe tener el ancho y largo para que el área de las seis jaulas sea la máxima, y cuál es esa área?

7.- El peso de una parte de un puente colgante está uniformemente distribuido entre torres gemelas, las cuales están separadas 400 pies, y se elevan a 90 pies sobre la carretera horizontal. Un cable tendido entre las puntas de las torres tiene la forma de una parábola, y su punto central está a 10 pies sobre la carretera.
Halle la ecuación de la parábola
Se usan nueve cables con separación uniforme para sostener el puente. Calcule la longitud total de los cables.

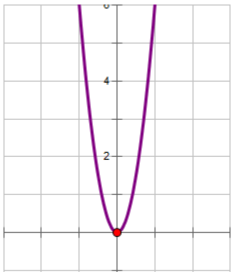
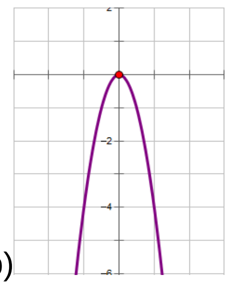
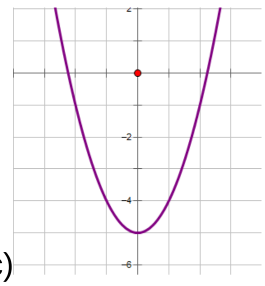
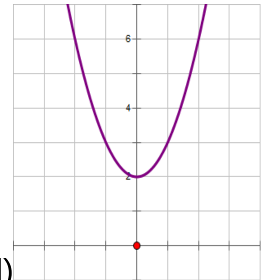
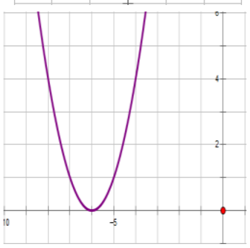
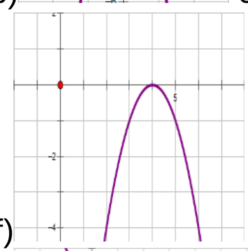
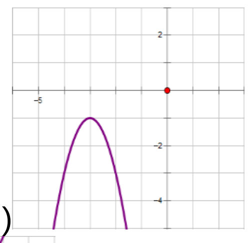
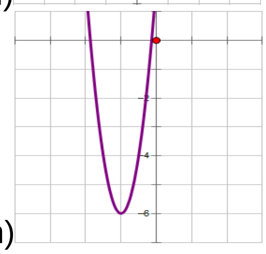
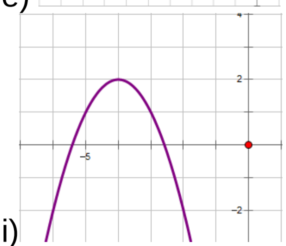
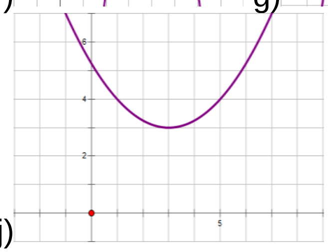
8.- Un jugador de béisbol lanza una pelota que sigue una trayectoria descrita por la siguiente función

$$h = -2t^2 + 12t + 4$$

Donde t: tiempo en s, h: altura en m.
¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
¿En qué tiempo alcanza esa altura máxima?

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS:

SERIE DE EJERCICIOS A:

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 
f) 
g) 
h) 
i) 
j) 

SERIE DE EJERCICIOS B

a) $f(x) = -3x^2 - 42x - 142$

b) $f(x) = 4x^2 + 72x + 323$

c) $f(x) = -10x^2 + 160x - 636$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$

e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 6x - 27$

SERIE DE EJERCICIOS C

a) $f(x) = (x-2)^2 - 9$
b) $f(x) = -(x-3)^2 + 17$
c) $f(x) = -(x-3)^2 + 7$
d) $f(x) = 4(x+\frac{1}{2})^2$
e) $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$

SERIE DE EJERCICIOS D

a) Vértice (-3, -25) , Concavidad positiva, Eje de simetría x = -3,
Raíces $x_1 = 2$, $x_2=-8$ Ecuación: $f(x) = (x+3)^2 - 25$

b) Vértice (3, 27) , Concavidad negativa, Eje de simetría x = 3,
Raíces $x_1 = 8.19$, $x_2=-2.19$ Ecuación: $f(x) = -(x-3)^2 + 27$

c) Vértice (3, 0) , Concavidad negativa, Eje de simetría x = 3,
Raíces $x_1 = 3$, $x_2=3$ Ecuación: $f(x) = -4(x-3)^2$

d) Vértice (-1, 0) , Concavidad positiva, Eje de simetría x = -1,
Raíces $x_1 = -1$, $x_2=-1$ Ecuación: $f(x) = (x+1)^2$

e) Vértice (-1, -1) , Concavidad positiva, Eje de simetría x = -1,
Raíces $x_1 = 0$, $x_2=-2$ Ecuación: $f(x) = (x+1)^2 - 1$

f) Vértice (3, -2) , Concavidad positiva, Eje de simetría x = 3,
Raíces $x_1 = 5$, $x_2=1$ Ecuación: $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2$

g) Vértice (-1, 6) , Concavidad negativa, Eje de simetría x = -1,
Raíces $x_1 = -0.13$, $x_2=-1.86$ Ecuación: $f(x) = -8(x+1)^2 + 6$

FUNCIÓN DE LA GRAFICA: $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 1$

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS:

1.- $A=-2x^2+12x$ se debe doblar de 3 pulgadas.

2.- Altura Máxima 424m Altura del edificio 100m

3.- $A=-2x^2+1000x$ Área máxima: 125000 m^2 Ancho 250m Largo 500m

4.- a) ½ seg. b) 36m c) 2seg. d) 32m

5.- La altura máxima que alcanza el objeto son 256 metros, el objeto tarda 4 segundos en llegar a su altura máxima, y tarda 8 segundos en regresar al piso desde que fue arrojado, el objeto se encuentra a 192 metros de altura a los 2 y a los 6 segundos.

6.- largo 50, ancho 37.5, y el área 1875m cuadrados.

7.- $y= (1/500)x^2+10$; 390 pies

8.- La altura máxima es de 22 m en un tiempo de 3 s.

UNIDAD III. ELEMENTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA PLANA

PROPÓSITO DE LA UNIDAD: Al finalizar la unidad, el alumnado comprenderá algunos conceptos y relaciones geométricas, obtenidos empíricamente a través de construcciones con regla y compás. Aplicará los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos.

APRENDIZAJES.

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

- Conocerá el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización.
- Describirá y reconocerá los elementos básicos de una figura geométrica, los expresará en forma verbal y escrita.
- Comprenderá mediante la construcción, los conceptos: segmento de recta, punto medio, líneas paralelas, líneas perpendiculares, mediatriz, ángulo y bisectriz.
- Clasificará los ángulos por su medida y su relación con otros.
- Conocerá e identificará los tipos de ángulos que se forman entre dos rectas cortadas por una transversal.
- Concluirá que en el caso que dos rectas paralelas sean cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes e inversamente.
- Aplicará los conceptos anteriores en la resolución de problemas.
- Clasificará los triángulos según sus lados y ángulos.
- Explicará en qué casos es posible construir un triángulo, a partir de tres segmentos dados.
- Mostrará y justificará las propiedades entre los ángulos de un triángulo:
- Aplicará las propiedades de los ángulos de un triángulo en la resolución de problemas.
- Distinguirá las características que determinan a las rectas y puntos notables en un triángulo
- Determinará geométricamente la distancia de un punto a una recta.
- Justificará y aplicará las propiedades del triángulo isósceles.
- Describirá los polígonos por sus características (regulares e irregulares).
- Conocerá y aplicará las propiedades de los polígonos.
- Calculará el perímetro y área de un polígono regular.

- Calculará el área de un polígono irregular por triangulación.
- Identificará las líneas notables de la circunferencia.
- Localizará el centro de una circunferencia.
- Aproxima el perímetro y área del círculo.

CONSTRUCCIONES Y ELEMENTOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS.

RESEÑA HISTÓRICA.

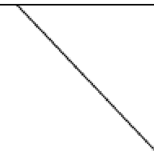
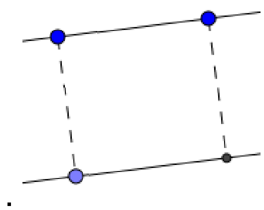
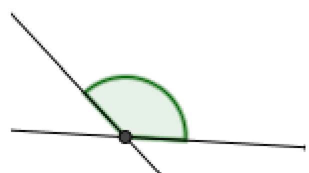
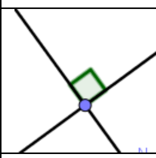
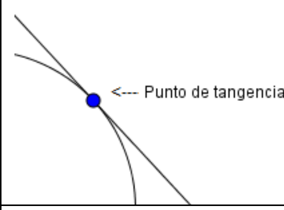
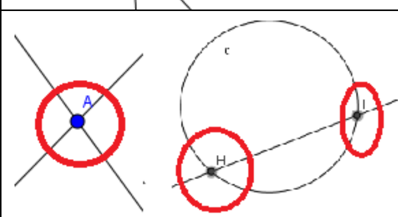
La palabra Geometría se deriva de los vocablos griegos geō (tierra) y metrein (medir), por lo que al hablar de Geometría nos referimos a la medida de la tierra. Sin embargo, la Geometría se encarga también de estudiar las características y propiedades de figuras como puntos, rectas, planos y aquellas que se encuentran en un plano o en el espacio.
A continuación, se muestra una tabla con algunos de los acontecimientos y personajes importantes a lo largo de la historia de la Geometría Euclidiana:

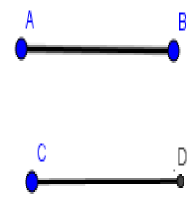
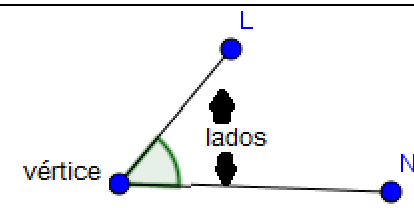
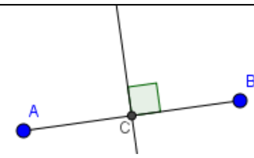
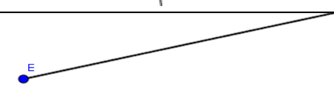
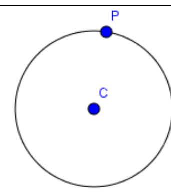
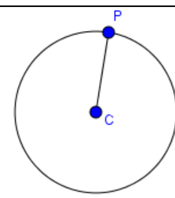
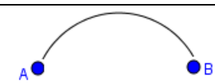
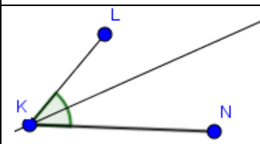
PERÍODO	ACONTECIMIENTO
-2000 a -500	Babilonia y Egipto: "En Babilonia se tiene registro de medidas como: El cálculo de áreas, del cuadrado, del círculo (con un valor aproximado de 3 para el número Pi).En Egipto, cuando el Nilo crecía se llevaba parte de las tierras, los agrimensores tenían que rehacer las divisiones para el pago de impuestos. Utilizaron también la geometría en la construcción de pirámides. Existen papiros (Rhind) en los que aparecen resueltos problemas geométricos de áreas.
-800 a -400	Grecia: Comienza la Geometría como ciencia deductiva. Los problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel.
-630 a -545	Thales de Mileto: Representa los comienzos de la Geometría como ciencia racional. Fundó la escuela Jónica. Fue uno de los siete sabios de Grecia. Sus estudios lo condujeron a poder determinar distancias inaccesibles, la igualdad de los ángulos de la base del triángulo isósceles, el valor del ángulo inscrito en la circunferencia, la demostración de teoremas sobre paralelas y proporcionalidad que llevan su nombre.
-582 a -500	Pitágoras de Samos. Se cree que fue discípulo de Thales. Fundó la escuela pitagórica en Crotona, al sur de Italia. Allí se discutía filosofía, matemáticas y ciencias naturales. Se le atribuye la demostración de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la construcción geométrica del polígono estrellado de cinco lados, la demostración del teorema de Pitágoras y como consecuencia de éste, el descubrimiento de números

	irracionales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.
-325 a -265	Euclides. Escribió una de las obras más famosas de todos los tiempos: "Los Elementos", que consta de 13 capítulos llamados "Libros". De esta obra se han hecho tantas ediciones que sólo lo aventaja la Biblia. Euclides construye la geometría partiendo de definiciones, postulados y axiomas con los cuales demuestra teoremas. La geometría euclidiana ha sobrevivido hasta nuestros días. Los 5 axiomas de Euclides son los siguientes: • Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une. • Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido. • Se puede trazar una circunferencia con cualquier punto y de cualquier radio. • Todos los ángulos rectos son congruentes. • Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.
-287 a -212	Arquímides de Siracusa: Inventó la forma de medir el área de superficies limitadas por figuras curvas como la elipse y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas como el cono y la esfera. Elaboró un método para calcular una aproximación al número Pi.

CONCEPTOS BÁSICOS.

METODO DEDUCTIVO	Método que consiste en encadenar conocimientos verdaderos, para obtener, como consecuencias lógicas, conocimientos nuevos.
AXIOMA	Es una proposición que se considera evidente y se acepta sin requerir demostración previa. En un sistema hipotético – deductivo es toda proposición no deducida (de otras) si no que constituye una regla general de pensamiento lógico.
POSTULADO	Es una proposición, no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.
TEOREMA	Proposición (supuestamente verdadera), que debe ser demostrada mediante el uso de axiomas, definiciones u otros teoremas ya demostrados.

Punto: Concepto geométrico que representa una posición. No tiene grosor ni longitud. Se representa mediante un punto dibujado.	
Línea. Es una figura que tiene longitud, pero no grosor. Puede ser curva o recta.	
Recta: Línea en la que todos los puntos que la forman tienen la misma dirección. Se puede extender indefinidamente.	
Rectas paralelas: Dos rectas son paralelas, cuando nunca se cruzan. Además la distancia perpendicular entre ellas es siempre la misma.	
Rectas oblicuas: Dos rectas que al intersectarse no forman ángulos rectos.	
Rectas perpendiculares : Dos rectas son perpendiculares entre sí, cuando al cruzarse forman ángulos rectos	
Tangente a una curva. Recta que toca a una curva en un solo punto llamado punto de tangencia.	
Punto de intersección : Punto donde se cruzan ya sea dos rectas, recta y un plano, una recta y una circuneferencia, etc.	
Segmento: Porción de línea recta que está limitada por dos puntos que son sus extremos	

Segmentos congruentes: son aquellos que tienen la misma longitud.	 $\overline{AB} = \overline{CD}$
Ángulo: Abertura entre dos rectas que se encuentran o intersectan en un punto. A las rectas que se encuentran se les llama lados del ángulo y al punto en donde se cruzan se le llama vértice del ángulo.	
Mediatriz: Recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a éste.	
Semirrecta: Porción de línea recta que sólo está limitada en un extremo.	
Circunferencia: conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es la misma.	
Radio: Distancia entre los puntos de una circunferencia y el centro de ésta.	
Arco: Porción de circunferencia.	 $\widehat{AB}$
Bisectriz: Segmento de recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.	

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS:

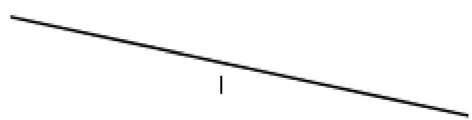
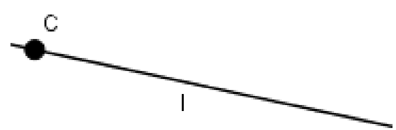
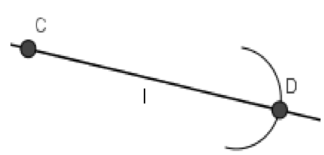
Una construcción geométrica, es un dibujo realizado mediante regla no graduada y compás.

- Con la regla se trazan líneas rectas, segmentos, semirrectas, se unen puntos, sin tomar en cuenta la escala.

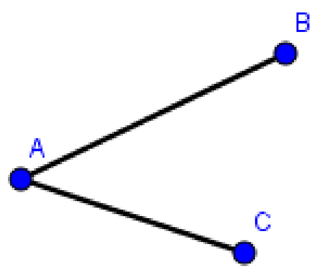
- El compás se utiliza para trazar circunferencias, arcos, transportar distancia es decir, con el compás “se miden” longitudes.

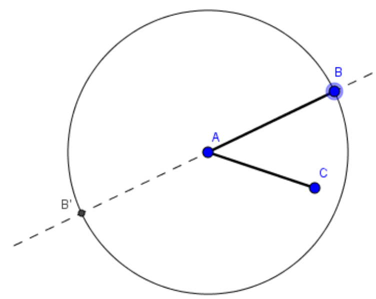
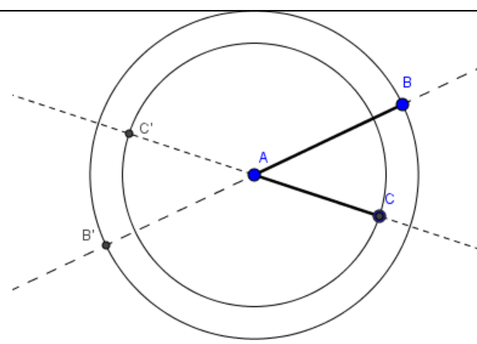
Existen diferentes formas de hacer una construcción geométrica las cuáles son válidas si se puede dar una justificación. A continuación ejemplificamos algunas, sugiriendo alguno de los métodos de construcción:

A) Construir un segmento $\overline{CD}$ congruente a otro segmento dado $\overline{AB}$.

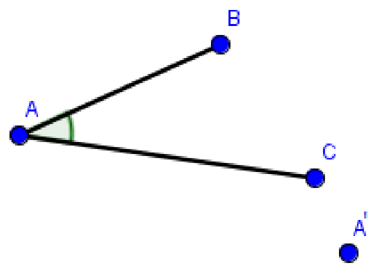
SUGERENCIA DE SOLUCIÓN	
Paso 1: Trazar una recta ***l*** cualquiera de mayor longitud a $\overline{AB}$.	
Paso 2: Marcar un punto cualquiera C en ***l.***	
Paso 3. Abrir el compás con centro en C y radio $\overline{AB}$ y marcar un arco que corte a ***l***. Nombrar D al punto de intersección de ***l*** con el arco. El segmento $\overline{CD}$, es el segmento buscado.	

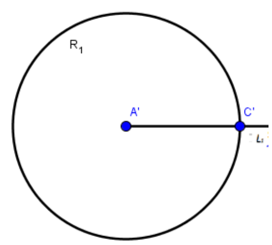
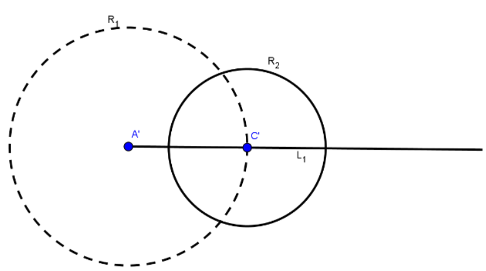
B) Dado un ángulo BAC construir otro ángulo igual:

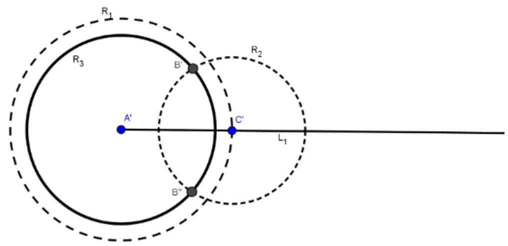
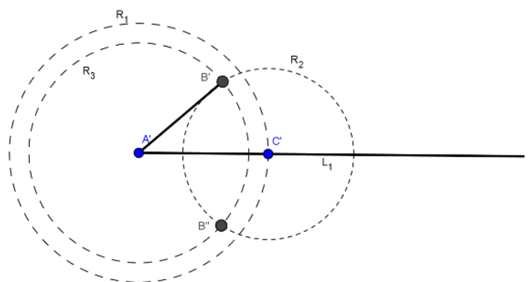
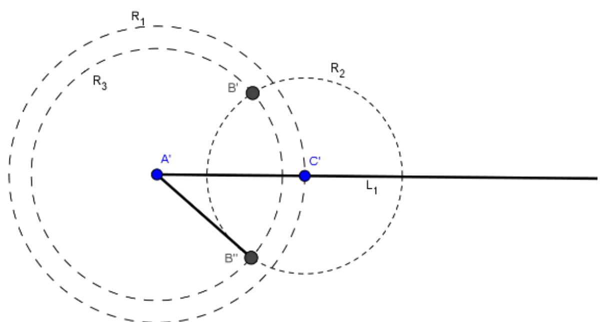


SUGERENCIA DE SOLUCIÓN	
Paso 1: Abrir compás con radio AB, con centro A trazar una circunferencia y prolongar AB del lado de A hasta tocar la circunferencia; asignar a este punto el nombre de B´.	
Paso 2: Abrir compás con radio AC, con centro A, trazar una circunferencia y prolongar AC del lado de A hasta tocar la circunferencia y asignar punto C'. El ángulo B'AC' es el ángulo buscado.	

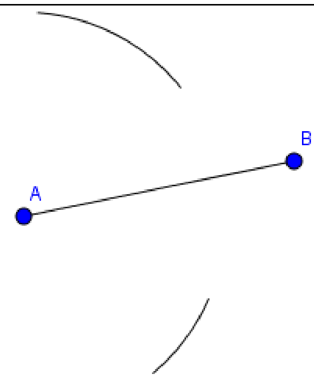
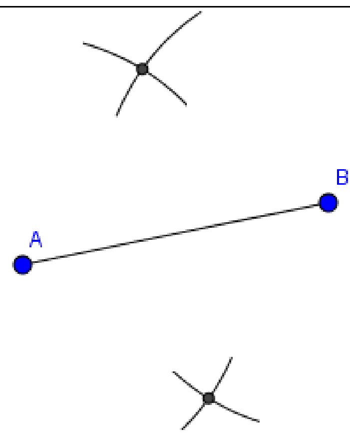
C) Construcción de un ángulo igual a otro ángulo dado, que pase por un punto fuera del ángulo.

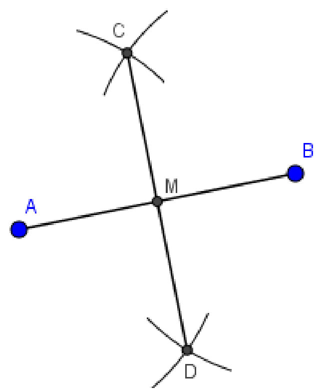


	SUGERENCIA DE SOLUCIÓN
Con la regla, trazar una semirrecta cualquiera L_1, con A' como punto inicial.	
Con radio AC, trazar una circunferencia R_1 con centro en A'. Llamar C' al punto en el que esta circunferencia corta a L_1.	
Con radio CB, trazar una circunferencia R_2 con centro en C'.	

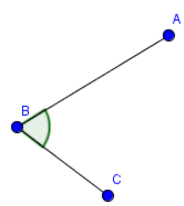
Con radio AB, trazar una circunferencia R_3 con centro en A’. Nombrar B’ y B’’ a los puntos donde R_2 se intersecta con R_3.	
Trazar un segmento entre A’ y B’. El ángulo B’A’C’ es el ángulo buscado.	
De otra forma: Trazar un segmento entre A’ y B’’. El ángulo B’’A’C’ es el ángulo buscado.	

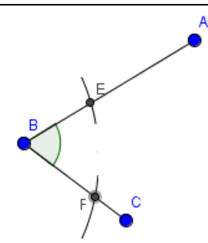
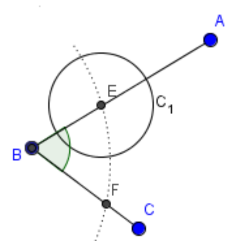
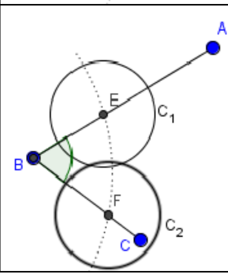
D) Trazar mediatriz de un segmento AB dado.

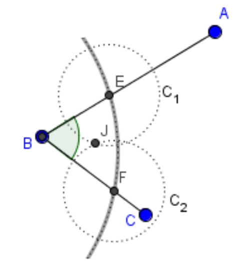
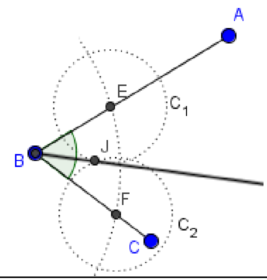
SUGERENCIA DE SOLUCIÓN	
Paso 1: Del segmento $\overline{AB}$, con centro en A abrir el compás más de la mitad de la longitud de $\overline{AB}$ y trazar un arco por arriba y por abajo del segmento $\overline{AB}$.	
Paso 2: Con centro B y el mismo radio del paso anterior, trazar un arco por arriba y uno por abajo del segmento $\overline{AB}$.	

Paso 3: Donde se cruzan los arcos, asignar puntos C y D y unirlos en una línea recta. Llamar M al punto donde cruzan $\overline{AB}$ con $\overline{CD}$. El segmento $\overline{CD}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ y el punto M, es el punto medio de $\overline{AB}$.	

E) Construcción de la bisectriz de un ángulo.

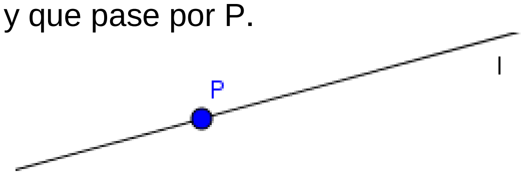


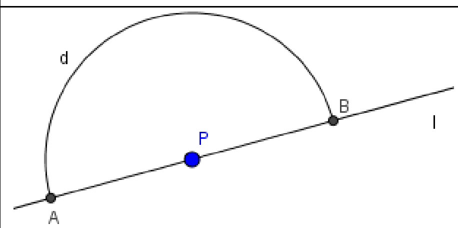
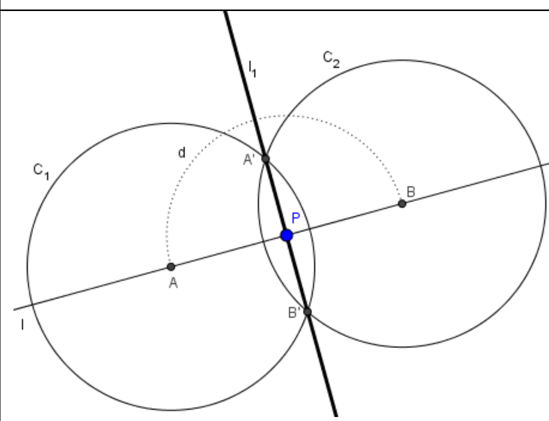
SUGERENCIA DE SOLUCIÓN	
Con centro en B, abrir el compás con un radio que corte los dos lados del ángulo y marcar los arcos que cortan los lados. A los puntos de intersección nombrarlos como E y F.	
Con centro en el punto E y un radio cualquiera, marcar una circunferencia C_1 dentro del ángulo ∠ ABC.	
Con centro en el punto F y el mismo radio, marcar un arco C_2, dentro de ∠ ABC que intersecte a C_1.	

Nombra J a uno de los puntos de intersección de C_1 y C_2.	
Unir con una semirrecta, B con J. Esta semirrecta es la bisectriz de ∠ ABC.	

F) Construcción de una perpendicular a una recta *l* que pase por un punto P en la recta.

Dada la recta *l* y un punto P en la recta, construir una recta l_1, que sea perpendicular a *l* y que pase por P.



SUGERENCIA DE SOLUCIÓN:	
Con centro en P y cualquier radio, construir un arco d que intersecte a l en dos puntos A, B.	
Trazaremos la mediatriz de $\overline{AB}$, que pasará por el punto P, por ser el centro del arco: Con centro en A y radio mayor a la mitad de $\overline{AB}$, trazar una circunferencia C_1. Con centro en B y el mismo radio, trazar una circunferencia C_2. Llamar A', B' los puntos donde se intersectan las circunferencias. Unir los punto A', B' mediante una recta l_1 que pasará por P. La recta l_1, es la recta buscada.	

Ejercicios:

I. Relaciona de forma correcta las columnas:

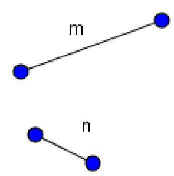
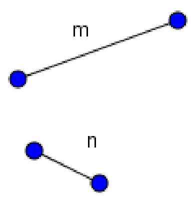
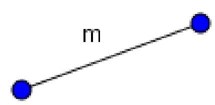
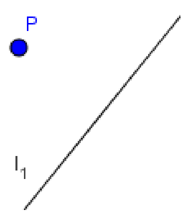
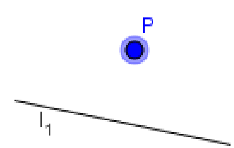
( )	Apertura entre dos rectas que se encuentran o intersectan en un punto llamado vértice.
( )	Se le atribuye el descubrimiento de números irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$
( )	Lugar donde crecía el Nilo y los agrimensores rehacían las dimensiones de los terrenos
( )	Recta que pasa por el punto medio de un segmento y es perpendicular a éste.
( )	Estudia las características y propiedades de figuras como puntos, rectas, planos y aquellas que se encuentran en un plano o en el espacio.
( )	-Dados dos puntos se puede trazar una recta que los une. -Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido. -Se puede trazar una circunferencia con cualquier punto y de cualquier radio. -Todos los ángulos rectos son congruentes. -Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.
( )	Rectas que nunca se cruzan
( )	Conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado centro es la misma.
( )	En este lugar, se tenía una aproximación de 3 para el número Pi.

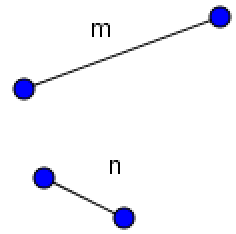
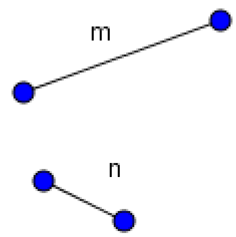
1.	Babilonia
2.	Paralelas.
3.	Mediatriz
4.	Axiomas de Euclides.
5.	Circunferencia
6.	Bisectriz
7.	Egipto
8.	Thales de Mileto
9.	Geometría

( )	Demostró teoremas sobre paralelas. Es uno de los 7 sabios de Grecia	10. Ángulo
( )	Segmento de recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.	11. Pitágoras de Samos

RESPUESTAS: 10, 11, 7, 3, 9, 4, 2, 5, 1, 8, 6

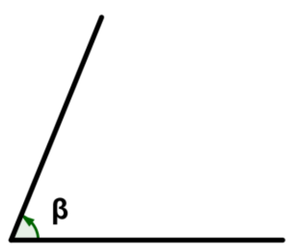
II. Realiza las siguientes construcciones utilizando únicamente regla y compás. Describe los pasos que realizaste para llevar a cabo tu construcción.

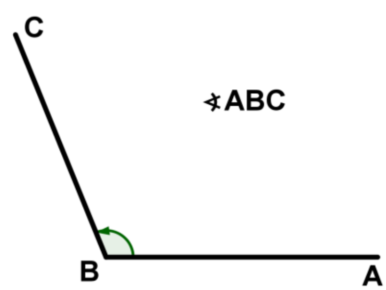
Dados dos segmentos de longitud m y n construir otro de longitud (2m+2n).	
Dados dos segmentos de longitud m y n, con m>n, construir otro de longitud m-n	
Construir un triángulo equilátero cuyos lados tengan longitud m.	
Trazar una recta ***l₂*** perpendicular a una recta ***l₁*** que pase por un punto P fuera de ***l₁.***	
Trazar una recta ***l₂*** paralela a una recta ***l₁*** que pase por un punto P fuera de ***l₁.***	

Dados los segmentos de longitud m y n, construir un triángulo rectángulo cuyos catetos midan m y n.	
Construir un rectángulo cuyos lados tengan longitud m y n.	

ÁNGULOS

Es la abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen llamado vértice. Las semirrectas se llaman lados. Se usa una letra griega dentro del ángulo. También podemos usar tres letras mayúsculas de manera que la letra que está situada en la parte de en medió es el vértice del ángulo.



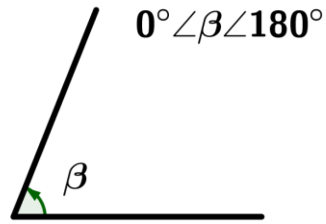
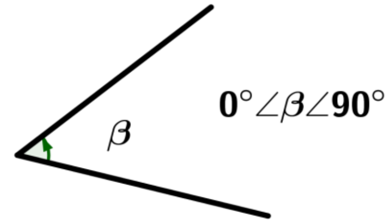
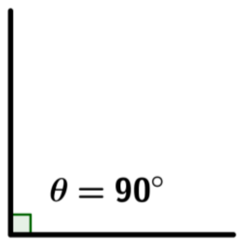
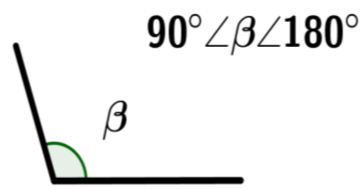
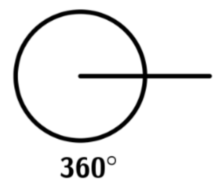


CLASIFICACIÓN DE LOS ÁNGULOS:

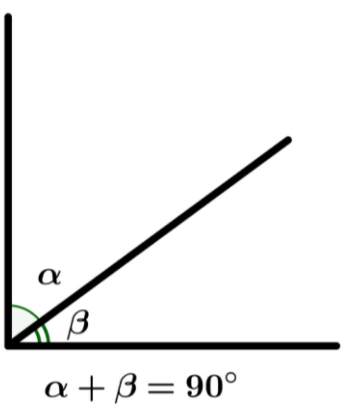
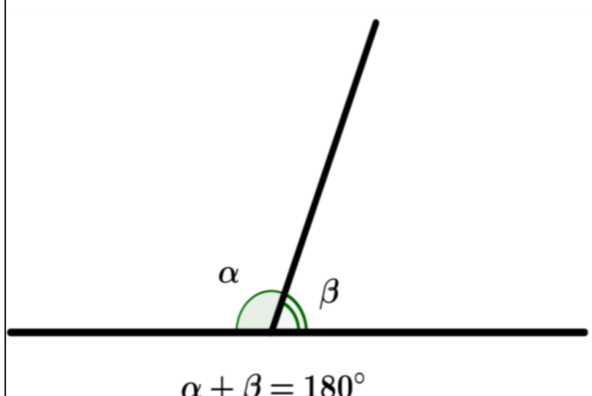
Los ángulos se pueden clasificar:

a) Según su medida.

a) Ángulo convexo.	b) Ángulo agudo.

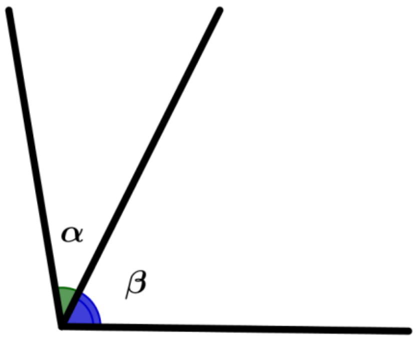
	
c) Ángulo recto. 	d) Ángulo obtuso. 
e) Ángulo llano. 	f) Ángulo completo (perigonal) 

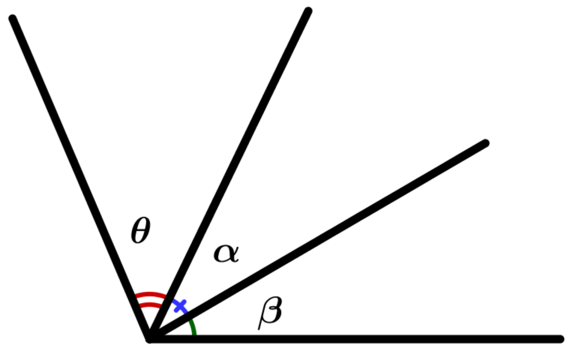
b) Según se suma.

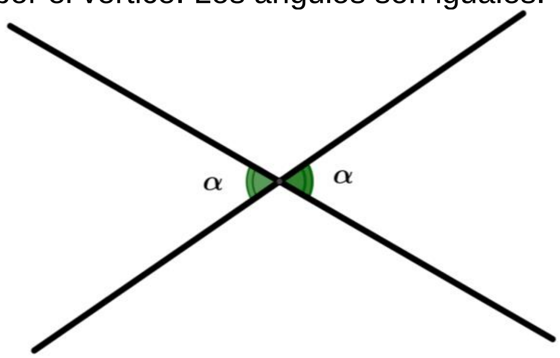
i. Ángulos complementarios. 	ii. Ángulos suplementarios. 

c) Según su posición.

a)Ángulos adyacentes	b) Ángulos consecutivos.

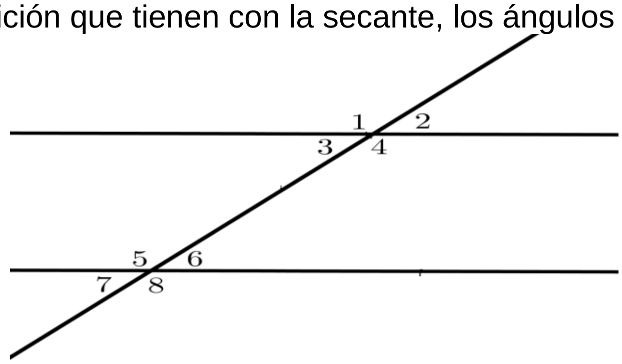
<table>
<tr>
<td>

Un lado los une.</td>
<td>

Pueden formar más ángulos.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">c) Ángulos opuestos por el vértice. Los ángulos son iguales.

</td>
</tr>
</table>

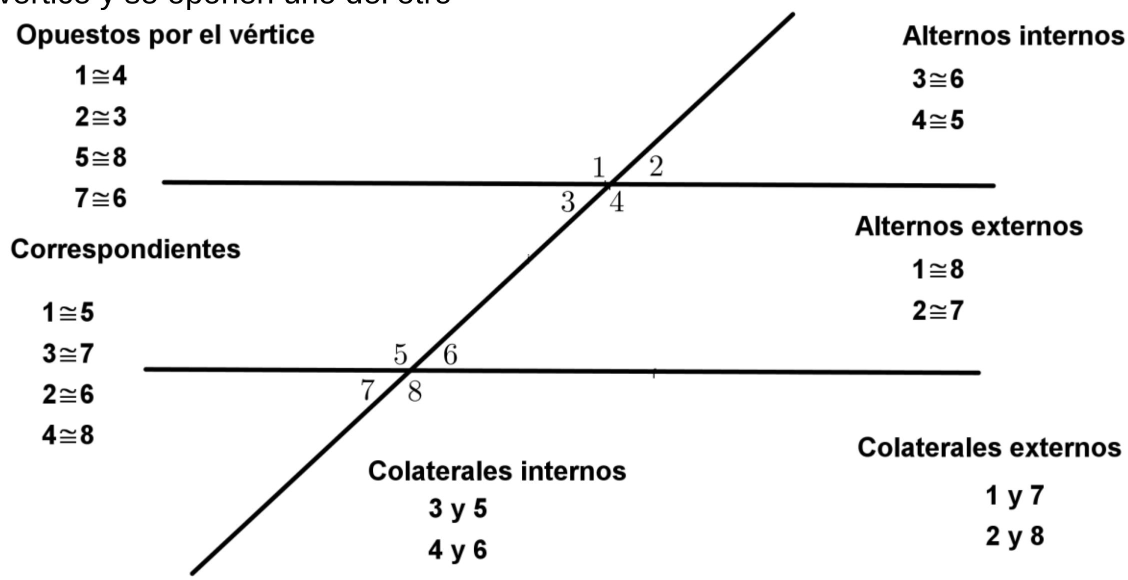
ANGULOS ENTRE RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.

Rectas paralelas: dos rectas son paralelas, si al prolongarse en ambas direcciones no se intersectan en ningún punto.
Recta secante: dos rectas son secantes si se intersectan en un punto
Al cortar dos rectas con una secante se forman 8 ángulos, los cuales se representan con letras minúsculas o con números, se clasifican por parejas de acuerdo con la posición que tienen con la secante, los ángulos formados son:



Colaterales internos: ángulos situados en el mismo lado de la secante y dentro de las rectas

Colaterales externos: ángulos situados en el mismo lado de la secante y fuera de las rectas
Correspondientes: ángulos situados en un mismo lado de la secante, formando parejas, un interno con un externo
Alternos internos: ángulos interiores que se encuentran en uno y otro lado de la secante
Alternos externos: ángulos exteriores que se encuentran en uno y otro lado de la secante
Ángulos opuestos por el vértice: son aquellos que tienen en común el mismo vértice y se oponen uno del otro

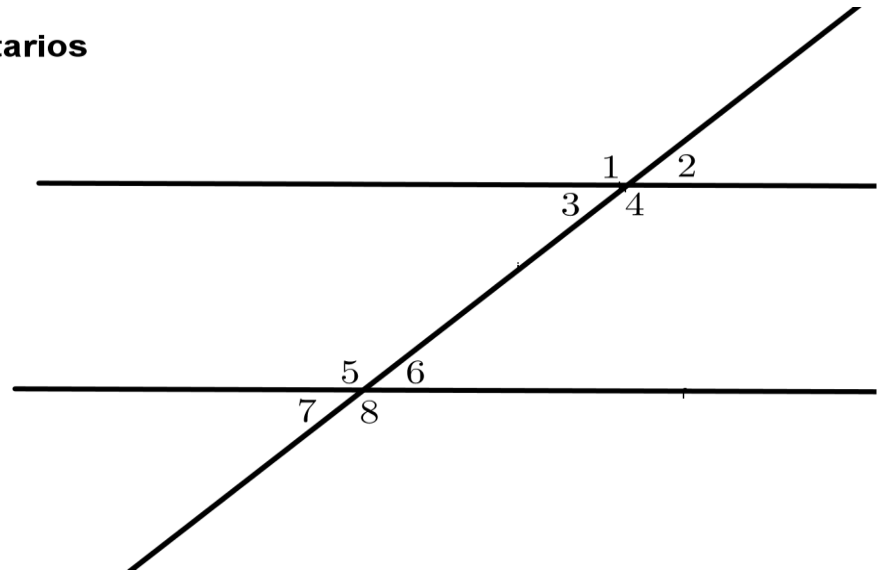


Ángulos suplementarios: son aquellos que al sumarse forman un ángulo llano, es decir su suma es igual a 180°.

Suplementarios

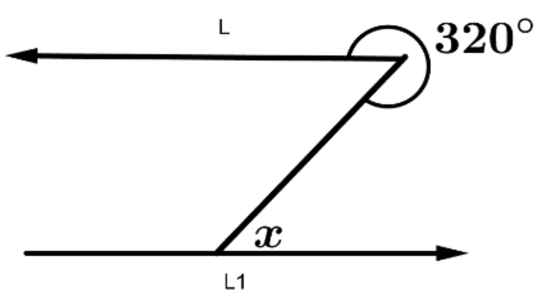
1 y 2
1 y 3
2 y 4
3 y 4

5 y 6
5 y 7
6 y 8
7 y 8



De acuerdo a lo anterior obtén el valor de los ángulos solicitados

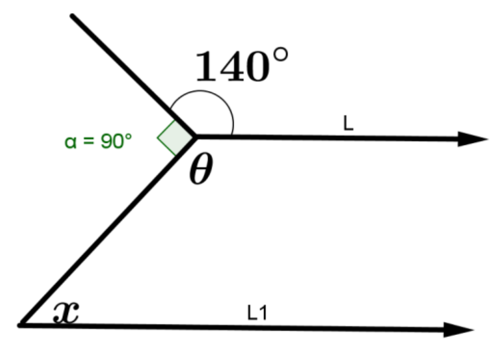
1.-. Calcula el valor de x $si\ L \parallel L_1$



*Respues*ta es:

$x = 40°$

2.-Calcula los valores faltantes si $L \parallel L_1$

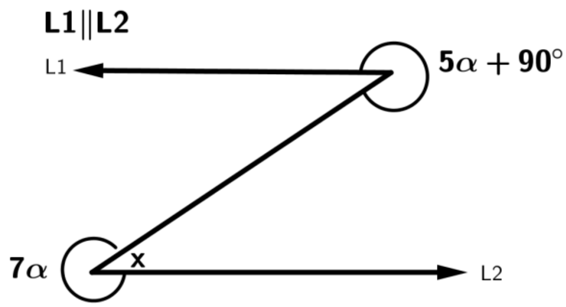


Respuesta es :

$x = 50°$ $\theta = 130°$

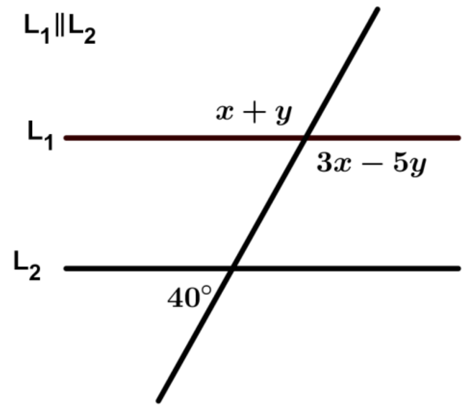
3.- Calcula los valores faltantes si

4.- Calcula los valores faltantes.



Respuesta es:

$$5\alpha + 90 + x = 360$$
$$7\alpha + x = 360$$
$$\alpha = 45$$
$$x = 45$$



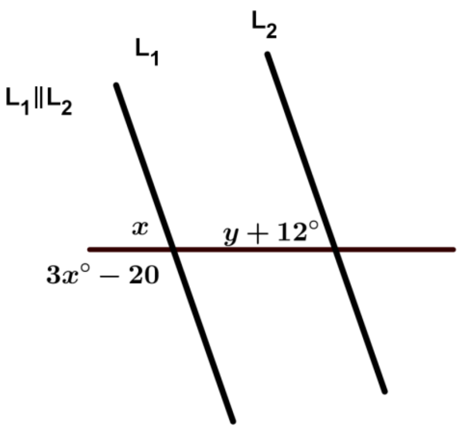
Respuesta es:

$y = 35^\circ \quad x = 105^\circ$

$3x - 5y = 140^\circ$

$x + y = 140^\circ$

5.-Calcula los valores faltantes.

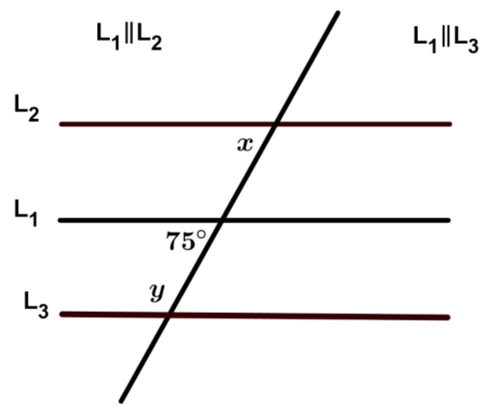


Respuesta es:

$x = 50^\circ \quad y = 38^\circ$

$3x - 20 = 130^\circ$

6.-Calcula los valores faltantes.



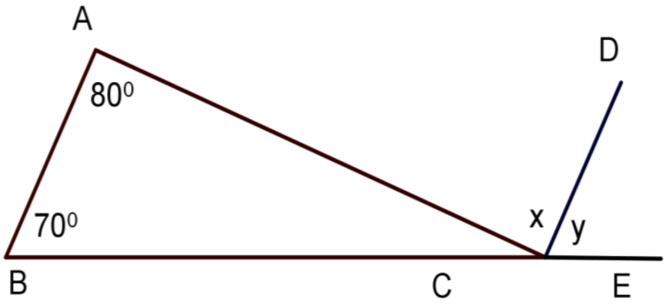
Respuesta es:

$x = 75^\circ$

$y = 105^\circ$

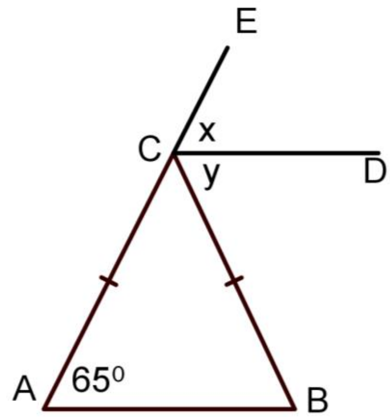
7.-Calcula los valores faltantes.

8.-Calcula los valores faltantes.



Las rectas son paralelas.
Respuesta es:

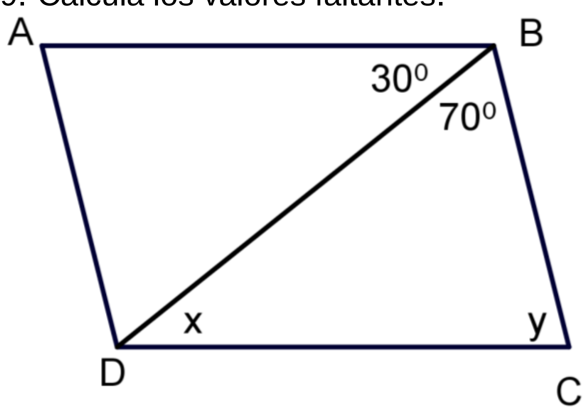
$$x = 80^\circ$$
$$y = 70^\circ$$



Las rectas son paralelas.
Respuesta es:

$$x = 65^\circ$$
$$y = 65^\circ$$

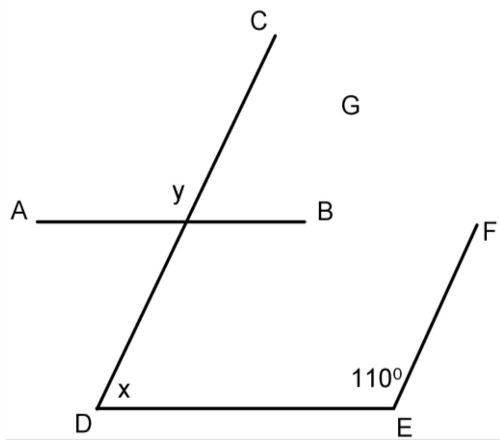
9.-Calcula los valores faltantes.



Las rectas son paralelas
Respuesta es:

$$x = 30^\circ$$
$$y = 80^\circ$$

10.-Calcula los valores faltantes.

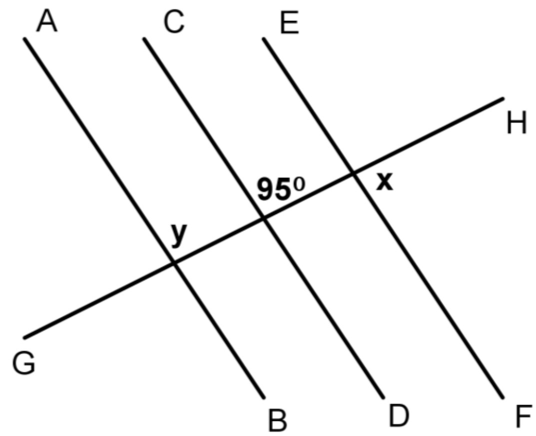


Las rectas son paralelas.
Respuesta es:

$$x = 70^\circ$$
$$y = 110^\circ$$

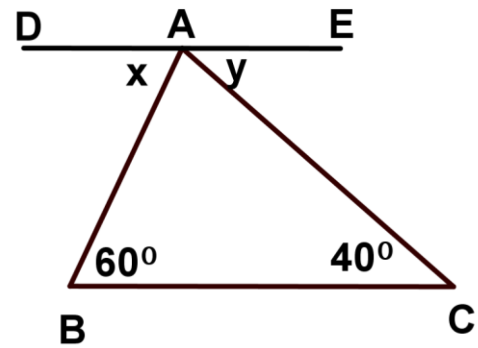
11.-Calcula los valores faltantes.

12.-Calcula los valores faltantes.



Las rectas son paralelas
Respuesta es:

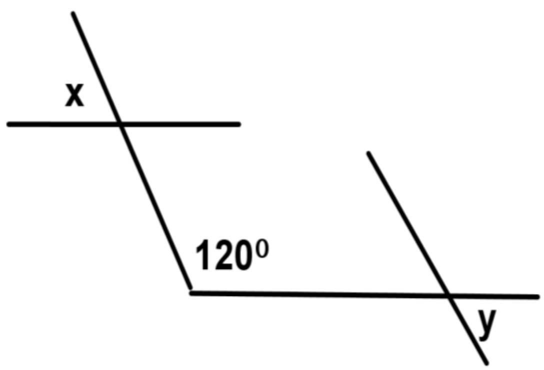
$$x = 85^\circ$$
$$y = 95^\circ$$



Las rectas son paralelas
Respuesta es:

$$x = 60^\circ$$
$$y = 40^\circ$$

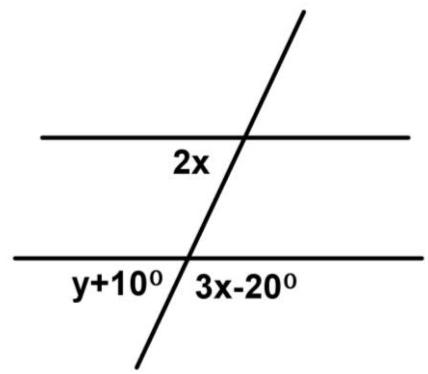
13.-Calcula los valores faltantes.



Las rectas son paralelas
Respuesta es:

$$x = 60^\circ$$
$$y = 60^\circ$$

14.-Calcula los valores faltantes.

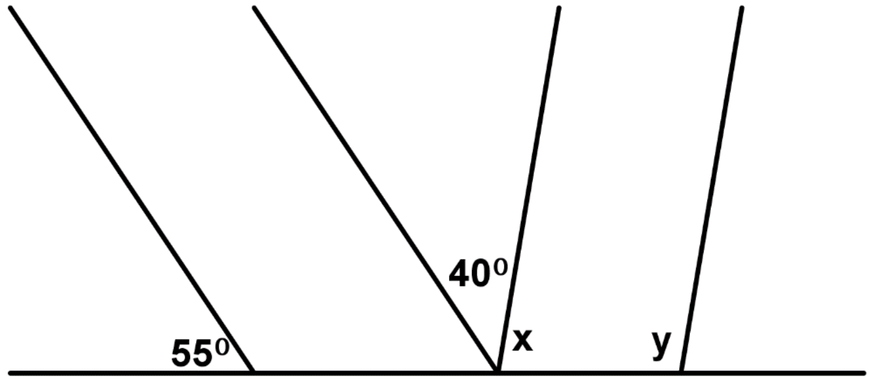


Las rectas son paralelas
Respuesta es:

$x = 40^\circ$ $y + 10^\circ = 80^\circ$
$y = 70^\circ$ $70^\circ + 10^\circ = 80^\circ$

$2x = 80^\circ$ $3x - 20^\circ = 100^\circ$
$2(40^\circ) = 80^\circ$ $3(40^\circ) - 20 = 100^\circ$

15.-Calcula los valores faltantes.



Las rectas son paralelas
Respuesta es:

$$\boldsymbol{x = 85^\circ}$$
$$\boldsymbol{y = 95^\circ}$$

TRIANGULOS

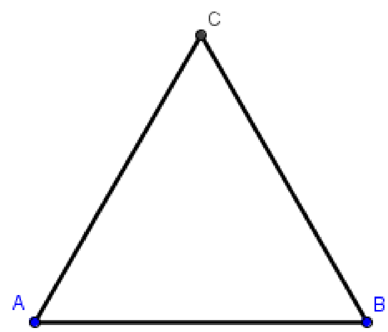
Definición de triángulo

Un triángulo es una superficie plana trilateral; es decir, tiene tres lados y por lo tanto tres ángulos y tres vértices.

Clasificación de triángulos

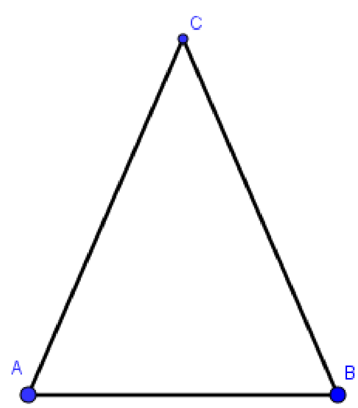
a) De acuerdo a sus lados

Triángulo equilátero: es aquel que tiene sus tres lados iguales y sus tres ángulos iguales.



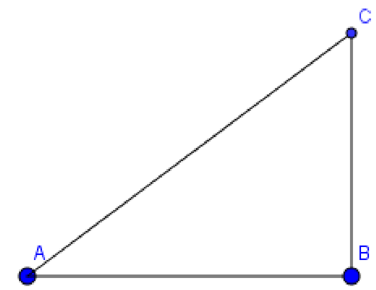
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$
$$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$$

Triángulo isósceles: es aquel que tiene dos lados iguales y dos ángulos iguales.



$$\overline{AC} = \overline{BC}$$
$$\angle A = \angle B$$

Triángulo escaleno: es aquel que tiene sus tres lados desiguales o diferentes y sus tres ángulos diferentes.

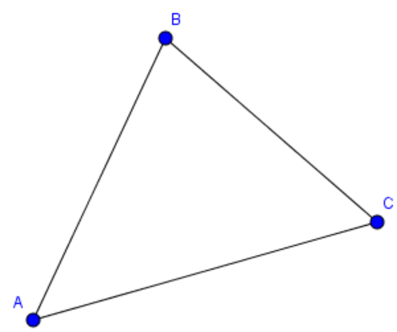


$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$$

$$\angle A \neq \angle B \neq \angle C$$

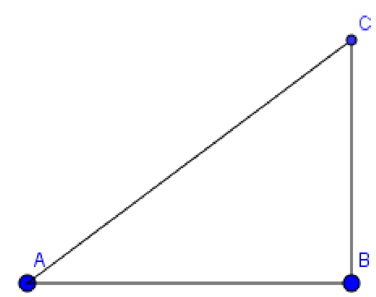
b) De acuerdo a sus ángulos

Triángulo acutángulo: es aquel que tiene sus tres ángulos agudos.



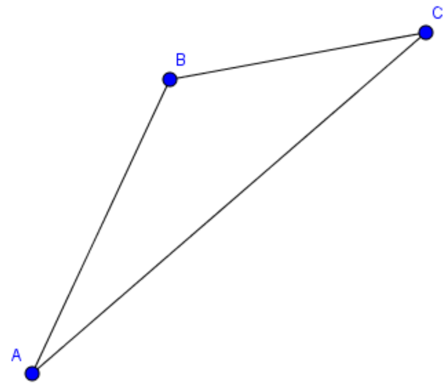
$$\angle A, \angle B, \angle C < 90°$$

Triángulo rectángulo: es aquel que tiene un ángulo recto.



$$\angle B = 90°$$

Triángulo obtusángulo: es aquel que tiene un ángulo obtuso.



$\angle B > 90°$

Desigualdad del triángulo

En todo triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos.

Por ejemplo: Supongamos que los segmentos $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 5$cm y $\overline{CA} = 4$ cm son los lados de un triángulo, para verificar la desigualdad del triángulo tendríamos que realizar lo siguiente:

$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$ 6 < 5 + 4

$\overline{BC} < \overline{AB} + \overline{CA}$ 5 < 6 + 4

$\overline{CA} < \overline{AB} + \overline{BC}$ 4 < 6 + 5

Podemos observar que la desigualdad del triángulo se cumple para los tres lados del triángulo.

Ejercicios:

Verificar si las siguientes ternas de segmentos podrían ser los lados de un triángulo utilizando la desigualdad del triángulo.

1) $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 11$, $\overline{CA} = 7$ Respuesta: Sí

2) $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 20$, $\overline{CA} = 5$ Respuesta: No

3) $\overline{AB} = 45$, $\overline{BC} = 35$, $\overline{CA} = 28$ Respuesta: Sí

4) $\overline{AB} = 85$, $\overline{BC} = 55$, $\overline{CA} = 145$ Respuesta: No

Propiedades del triángulo

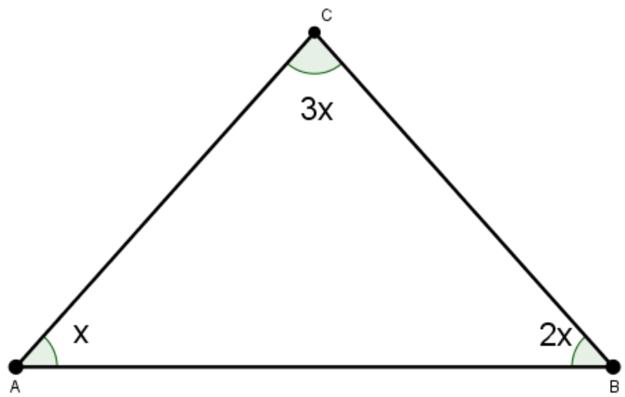
Teorema: "La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a dos ángulos rectos; es decir 180°".

Teorema: "La suma de los tres ángulos exteriores o externos de todo triángulo es igual a cuatro ángulos rectos; es decir 360°".

Teorema: "Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos que no le son adyacentes".

Ejemplo:

Los ángulos interiores de un triángulo son A, B y C. Si el ángulo B es el doble del ángulo A y el ángulo C es el triple del ángulo A, ¿Cuánto mide cada ángulo?



Tomando en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° planteamos la siguiente ecuación:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Como no conocemos el valor del ángulo A, suponemos que es x. Además, sabemos que el ángulo B es el doble del ángulo A; es decir 2x. Por otro lado, sabemos que el ángulo C es el triple de ángulo A; por lo tanto, es igual a 3x. Finalmente la ecuación anterior sería equivalente a la siguiente:

$$x + 2x + 3x = 180°$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos el valor de x:

$$x + 2x + 3x = 180°$$
$$6x = 180°$$
$$x = \frac{180°}{6}$$
$$x = 30°$$

Conociendo el valor de x, podemos saber el valor de los tres ángulos:

Ángulo A = x = 30°

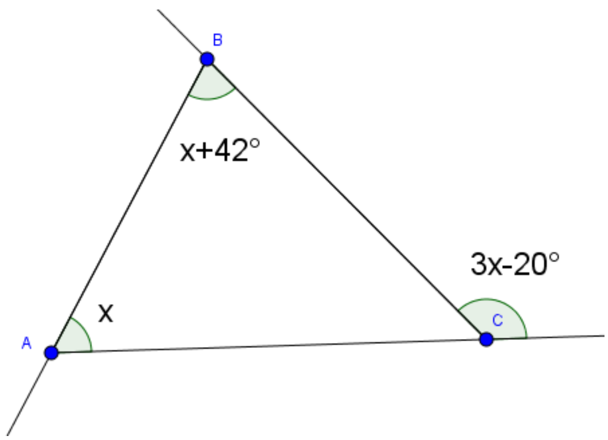
Ángulo B = 2x = 2(30°) = 60°

Ángulo C = 3x = 3(30°) = 90°

Los cuales suman 180°.

Ejemplo:

Obtener el valor de X, y el valor de cada ángulo en la siguiente figura:



Sabemos que un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos que no le son adyacentes; por lo tanto, a partir de la figura anterior podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x + x + 42° = 3x - 20°$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &x + x + 42° = 3x - 20° \\ &x + x - 3x = -20° - 42° \\ &-x = -62° \\ &x = 62° \end{aligned}$$

Conociendo el valor de x, podemos saber el valor de los tres ángulos:

Ángulo A = x = 62°

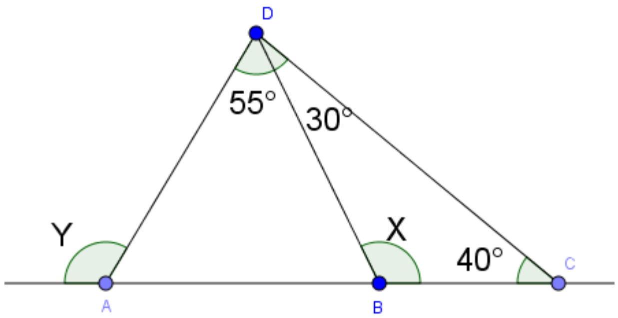
Ángulo B = x + 42°= 62° + 42° = 104°

Ángulo C = 3x – 20° = 3(62°) – 20° = 166°

Y efectivamente la suma de los ángulos A y B es igual al ángulo C.

Ejemplo:

Obtener el valor de X y Y en la siguiente figura:



Trabajaremos primero con el triángulo BCD, sabemos que la suma de sus ángulos interiores es 180°; por lo tanto, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$30° + 40° + x = 180°$$

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos el valor de x.

$$\begin{aligned} &30° + 40° + x = 180° \\ &x = 180° - 30° - 40° \\ &x = 110° \end{aligned}$$

Sabiendo el valor de x, podemos conocer el valor de su ángulo suplementario, que sería de 70°. Además, sabemos que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a él, por lo tanto, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} &55° + 70° = y \\ &125° = y \end{aligned}$$

Ejercicios:

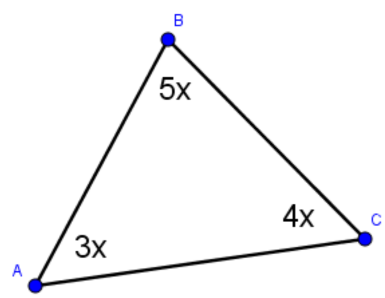
1) Los ángulos interiores de un triángulo son: A, B y C. Si el ángulo B excede en 18° al ángulo A y el ángulo C es la mitad del ángulo B, ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

Solución:
- $A = 61.2°$
- $B = 79.2°$
- $C = 39.6°$

2) Los ángulos interiores de un triángulo son: A, B y C. Si el ángulo A es 15° menor que la mitad del ángulo B y el ángulo C excede en 11° a la cuarta parte del ángulo B, ¿Cuánto mide cada ángulo?

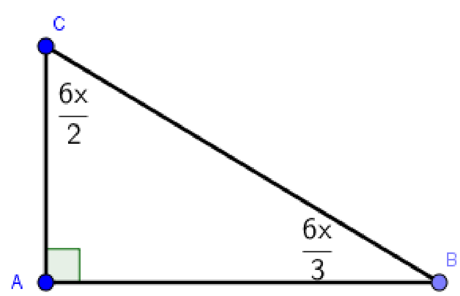
Solución:
- $A = 37.57°$
- $B = 105.15°$
- $C = 37.28°$

3) Obtener el valor de X en la siguiente figura:



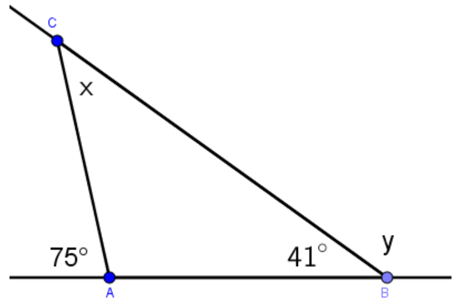
Solución: $x = 15$

4) Obtener el valor de X en la siguiente figura:



Solución: $x = 18$

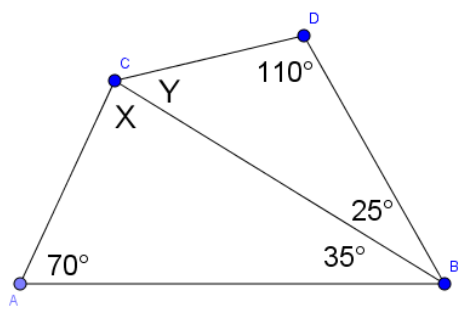
5) Obtener el valor de X y Y en la siguiente figura:



Solución: $x = 34°$

$y = 139°$

6) Obtener el valor de X y Y en la siguiente figura:



Solución: $x = 75°$

$y = 45°$

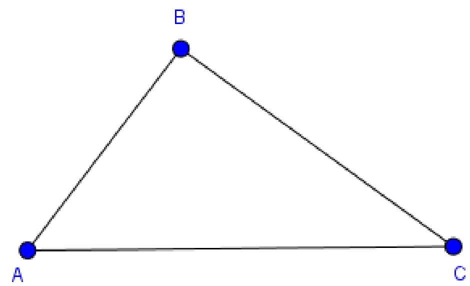
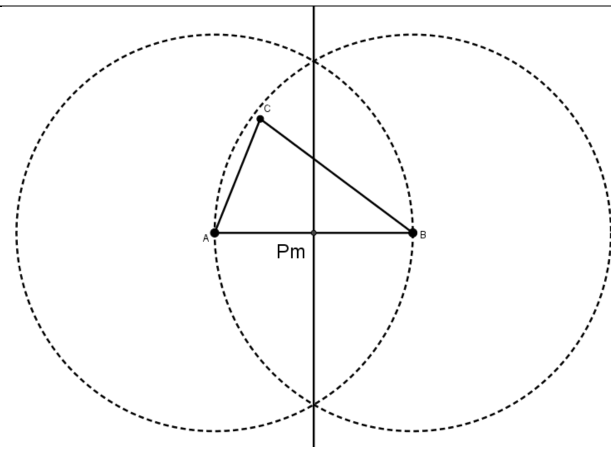
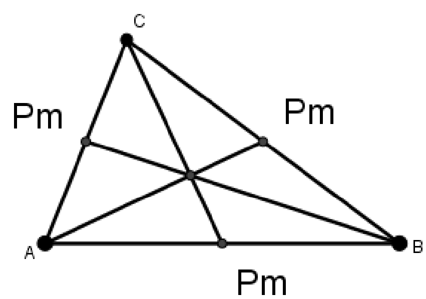
RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

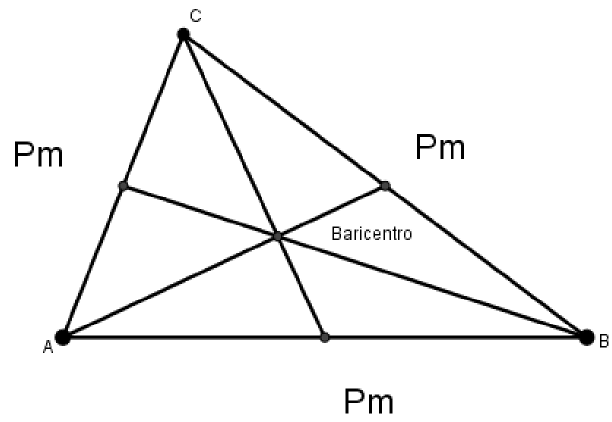
a) Mediana y baricentro

Mediana: Segmento trazado desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

Baricentro: Punto donde se cortan las medianas.

Construcción:

1. Supongamos el triángulo ABC	
2. Se ubican los puntos medios de los lados del triángulo con ayuda de la construcción de la mediatriz.	
3. Se construyen las medianas desde el vértice del triángulo hasta el punto medio de lado opuesto.	

4. El punto donde se cortan las medianas es el baricentro.	

b) Mediatriz, Circuncentro y circunferencia circunscrita

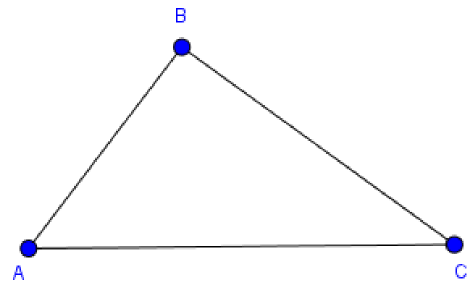
Mediatriz: Recta perpendicular al lado del triángulo trazada en el punto medio de dicho lado.
Circuncentro: Punto donde se cortan las mediatrices.
Circunferencia circunscrita: Es aquella que tiene su centro en el Circuncentro y su radio es el segmento que une al Circuncentro con cualquiera de los vértices del triángulo.

Construcción:

<table>
<tr>
<td>

1. Supongamos el triángulo ABC

</td>
<td>



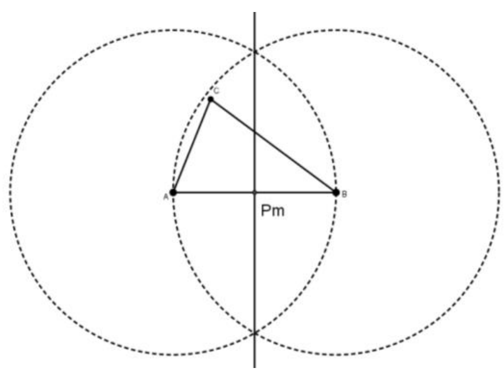
</td>
</tr>
<tr>
<td>

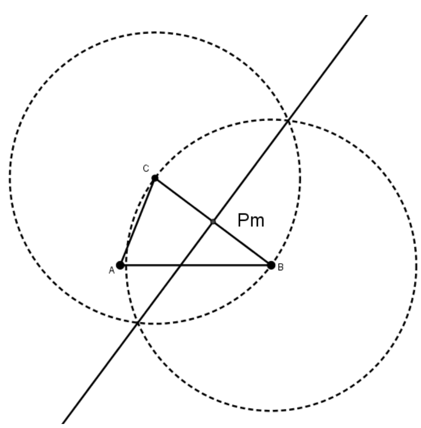
2. Se construyen las mediatrices de los lados del triángulo.

Para construir la mediatriz del lado $\overline{AC}$ colocas la punta del compás en A y abres hacia C y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en C y abres hacia A y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La mediatriz se construye de intersección a intersección.

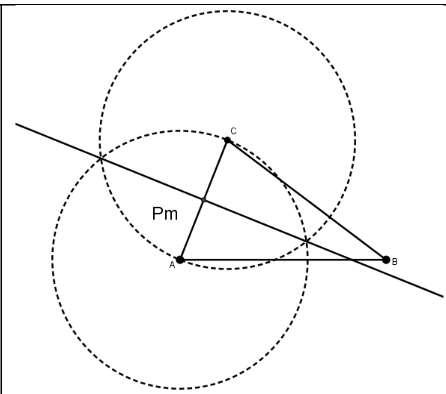
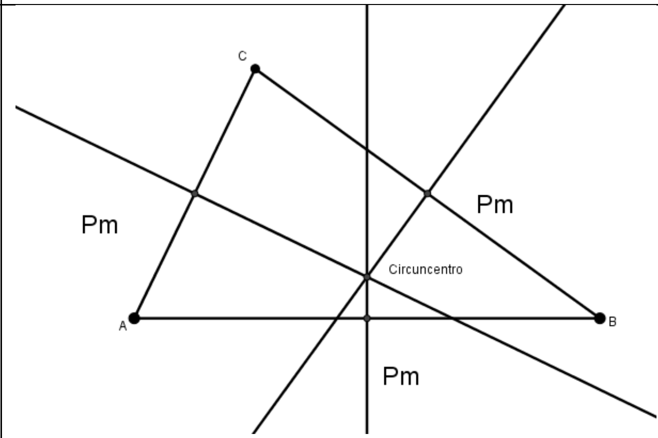
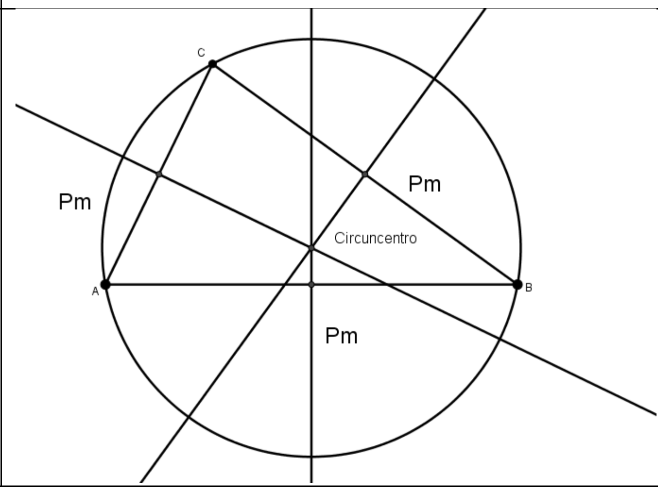
Para construir la mediatriz del lado $\overline{AB}$ colocas la punta del compás en A y abres hacia B y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en B y abres hacia A y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La mediatriz se construye de intersección a intersección.

</td>
<td>





</td>
</tr>
</table>

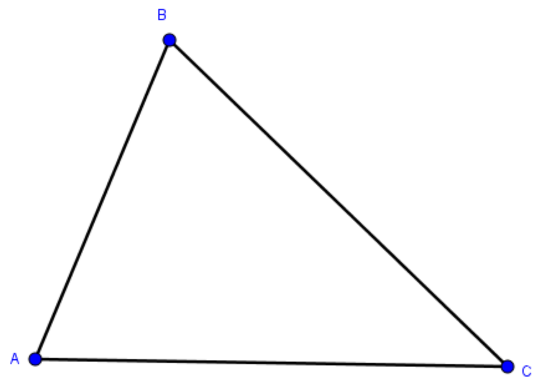
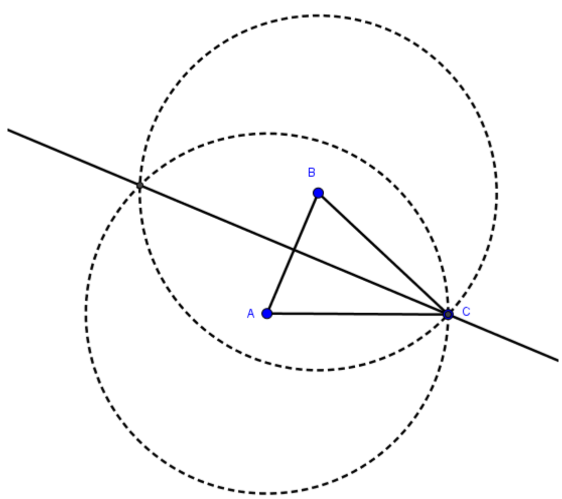
Para construir la mediatriz del lado $\overline{BC}$ colocas la punta del compás en B y abres hacia C y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en C y abres hacia B y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La mediatriz se construye de intersección a intersección.	
3. El punto donde se cortan las mediatrices es el Circuncentro.	
4. La circunferencia circunscrita es aquella que tiene su centro en el Circuncentro y su radio es el segmento que une al Circuncentro con cualquiera de los vértices del triángulo.	

c) Altura y ortocentro

Altura: Recta perpendicular trazada desde el vértice, al lado opuesto o su prolongación.

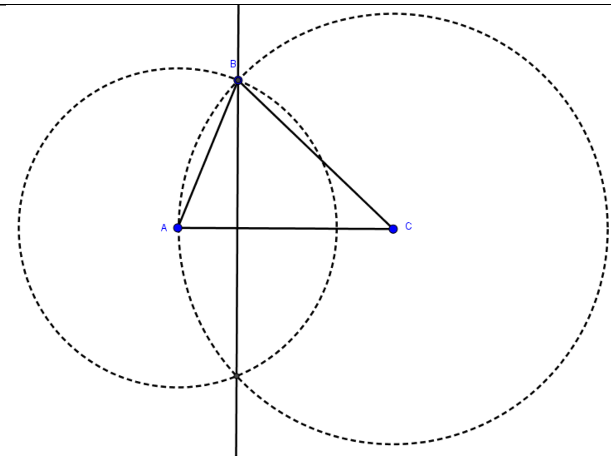
Ortocentro: Punto donde se cortan las alturas.

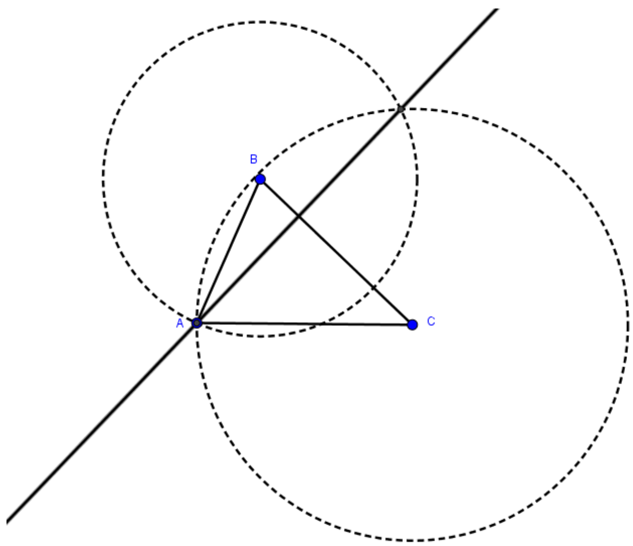
Construcción:

1. Supongamos el triángulo ABC	
2. Se construyen las alturas de los lados del triángulo. Para construir la altura del vértice C, colocas la punta del compás en B y abres hacia C y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en A y abres hacia C y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La altura se traza desde C hacia la intersección de las circunferencias.	

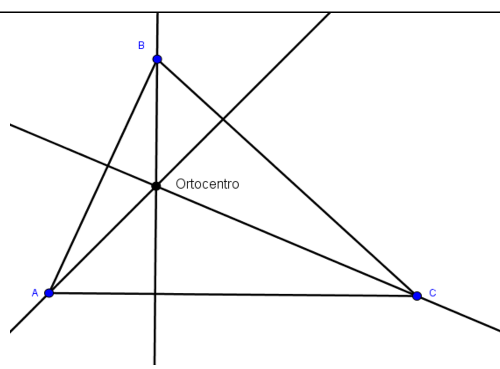
<table>
<tr>
<td>Para construir la altura del vértice B, colocas la punta del compás en A y abres hacia B y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en C y abres hacia B y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La altura se traza desde B hacia la intersección de las circunferencias.

Para construir la altura del vértice A, colocas la punta del compás en B y abres hacia A y trazas una circunferencia o arco, posteriormente, colocas la punta del compás en C y abres hacia A y trazas una circunferencia o arco que intersecte a la circunferencia o arco anterior. La altura se traza desde A hacia la intersección de las circunferencias.</td>
<td>





</td>
</tr>
<tr>
<td>3. El punto donde se cortan las alturas es el ortocentro.</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

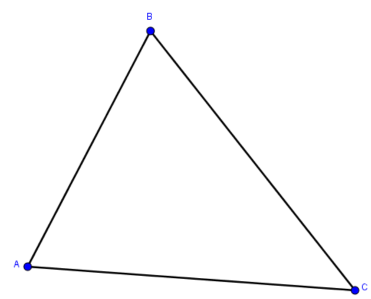
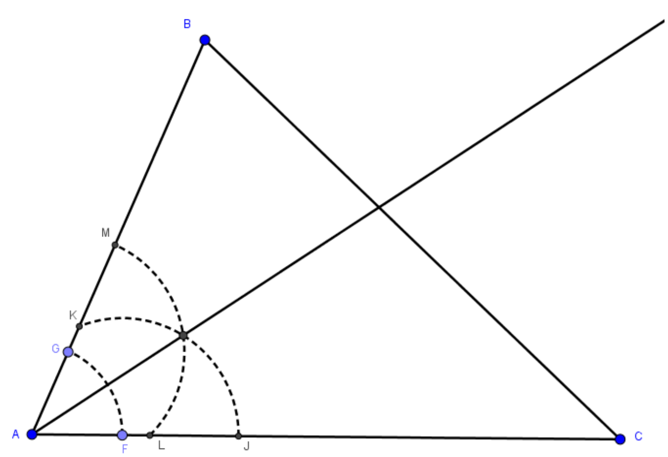
d) Bisectriz, incentro y circunferencia inscrita

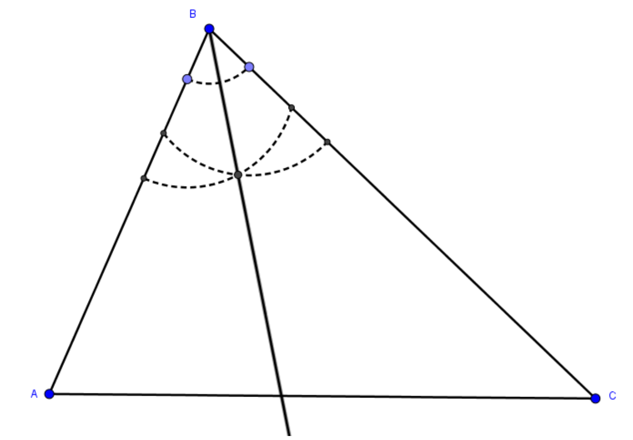
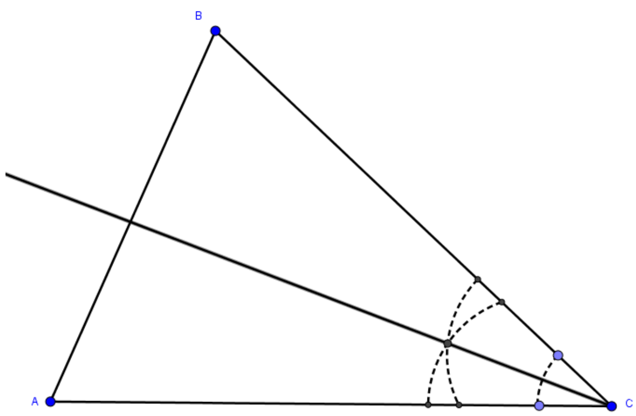
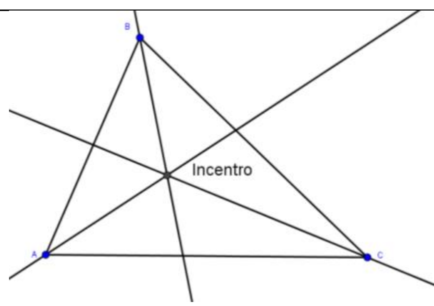
Bisectriz: Recta que corresponde a la bisectriz de un ángulo interior. Es la recta que divide al ángulo en dos partes exactamente iguales.

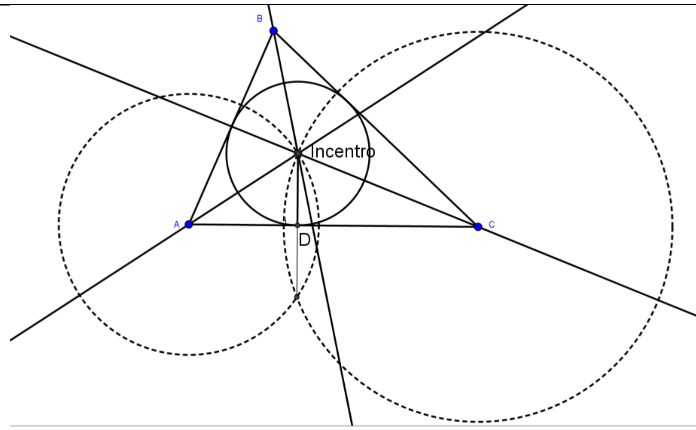
Incentro: Punto donde se cortan las bisectrices.

Circunferencia inscrita: Es la circunferencia que tiene su centro en el incentro y su radio es el segmento perpendicular trazado desde el incentro a cualquiera de los lados del triángulo.

Construcción:

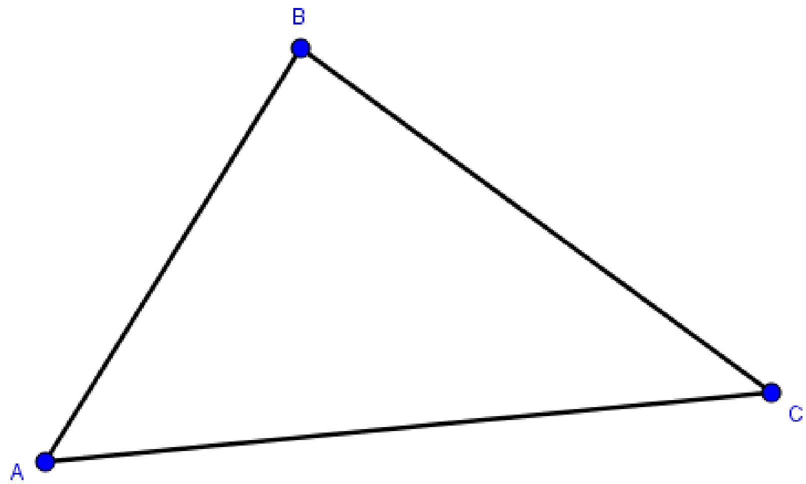
1. Supongamos el triángulo ABC	
2. Se construyen las bisectrices de los ángulos del triángulo. Para construir la bisectriz del ángulo A, colocas la punta del compás en A y trazas un arco de circunferencia corte a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, posteriormente, colocas la punta del compás en cada una de las intersecciones anteriores y trazas arcos de circunferencia con la misma abertura del compás. La bisectriz se construye desde A hasta la intersección obtenida. Para construir la bisectriz del ángulo B, colocas la punta	

del compás en B y trazas un arco de circunferencia que corte a los lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$, posteriormente, colocas la punta del compás en cada una de las intersecciones anteriores y trazas arcos de circunferencia con la misma abertura del compás. La bisectriz se construye desde B hasta la intersección obtenida.	
Para construir la bisectriz del ángulo C, colocas la punta del compás en C y trazas un arco de circunferencia que corte a los lados $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, posteriormente, colocas la punta del compás en cada una de las intersecciones anteriores y trazas arcos de circunferencia con la misma abertura del compás. La bisectriz se construye desde C hasta la intersección obtenida.	
3. El punto donde se cortan las bisectrices es el incentro.	

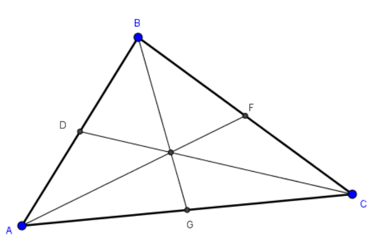
4. La circunferencia inscrita es aquella que tiene su centro en el incentro y su radio es el segmento perpendicular a alguno de los lados del triángulo trazado desde el incentro. Para construir el radio se traza una circunferencia colocando la punta del compás en el extremo de uno de los lados (A) y abriendo hacia el incentro, y otra circunferencia colocando la punta del compás en el otro extremo del mismo lado (B) y abriendo hacia el incentro. Posteriormente, se ubica la intersección de dichas circunferencias y se traza un segmento desde el incentro hasta la intersección. Finalmente, el radio es el segmento cuyos extremos son el incentro y el punto donde el segmento anterior corta al lado (D).	

Ejercicios:

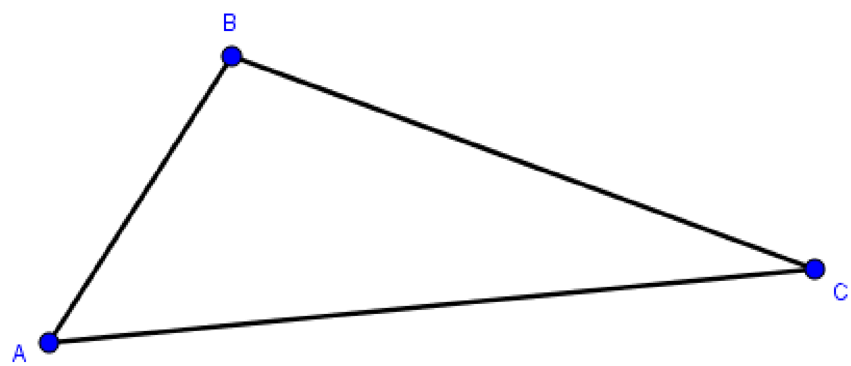
1. En el siguiente triángulo construye las medianas y ubica el baricentro.



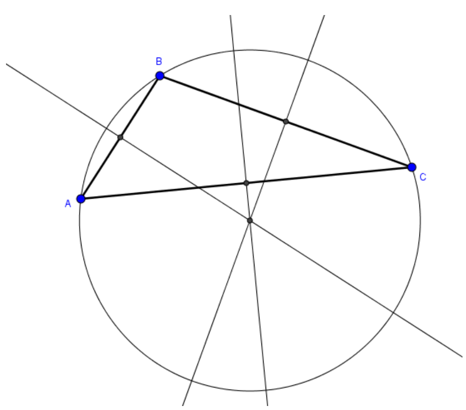
Solución:



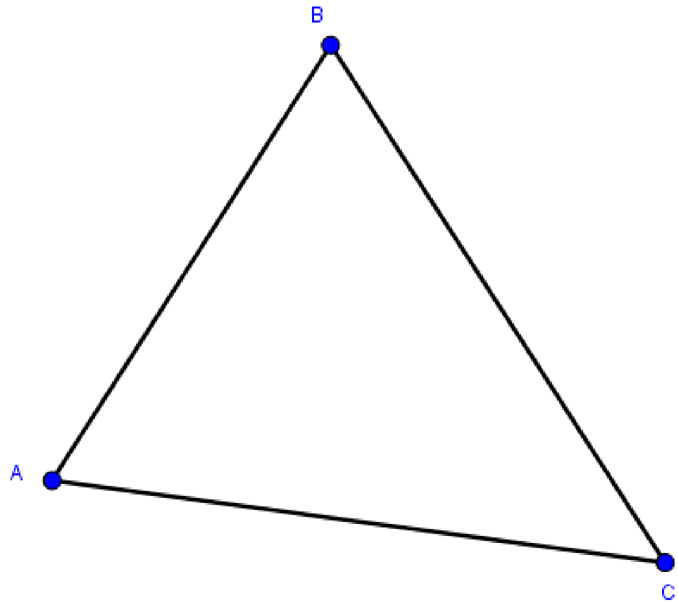
2. En el siguiente triángulo construye las mediatrices, ubica el circuncentro y traza la circunferencia circunscrita.



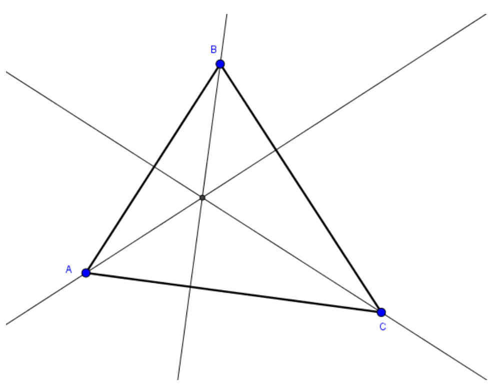
Solución:



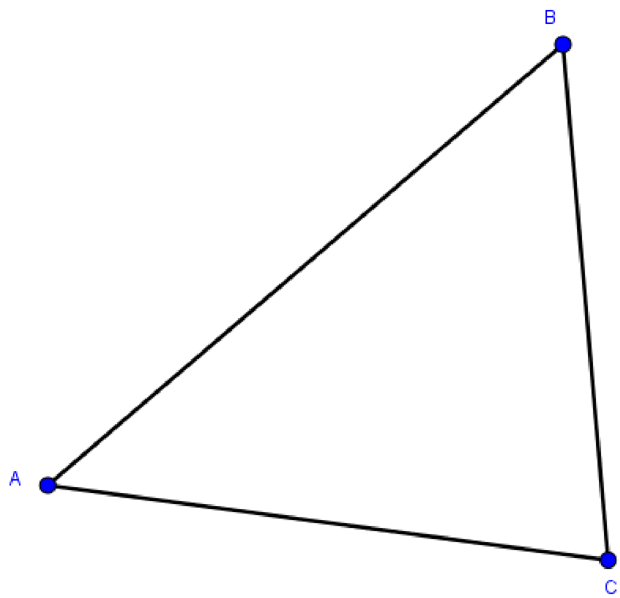
3. En el siguiente triángulo construye las alturas y ubica el ortocentro.



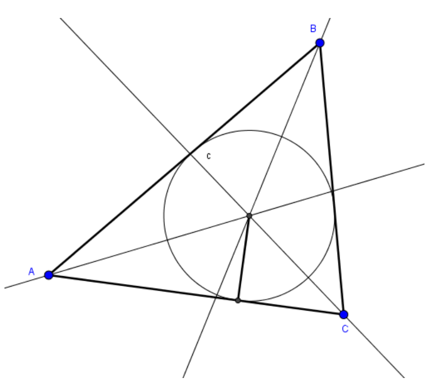
Solución:



4. En el siguiente triángulo construye las bisectrices, ubica el incentro y traza la circunferencia inscrita.



Solución:



PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

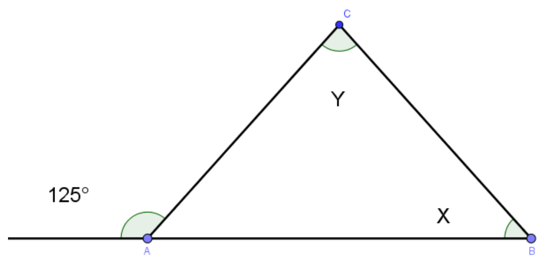
Teorema: "Los ángulos adyacentes a la base son iguales"

Teorema: "La altura, la mediana y la mediatriz de la base coinciden"

Teorema: "La bisectriz del ángulo formado por los lados congruentes, corta al lado opuesto, formando ángulos congruentes".

Ejemplo:

Obtener el valor de X y Y en la siguiente figura:



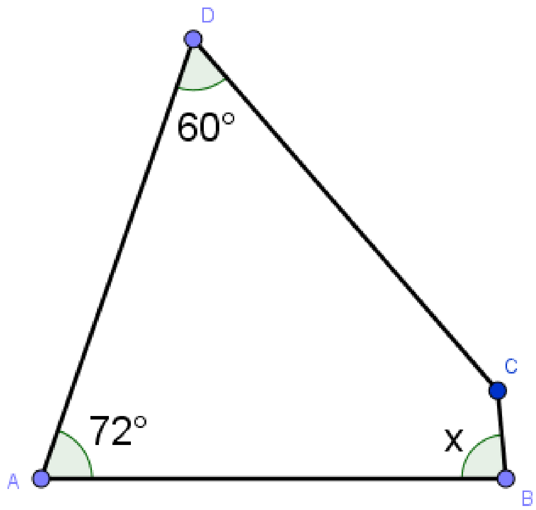
$$\overline{AC} = \overline{BC}$$

Al saber que el triángulo tiene dos lados iguales, sabemos que es un triángulo isósceles y por lo tanto también sus ángulos A y B son iguales. Por otro lado, el ángulo A mide 55° porque es suplementario con el ángulo de 125°. De acuerdo a lo anterior, también sabemos que x = 55°, puesto que los ángulos A y B son iguales. Finalmente, recordando que la suma de los ángulos interiores del triángulo es igual a 180° podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
&\angle A + x + y = 180^\circ \\
&55^\circ + 55^\circ + y = 180 \\
&y = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ \\
&y = 70^\circ
\end{aligned}$$

Ejercicios:

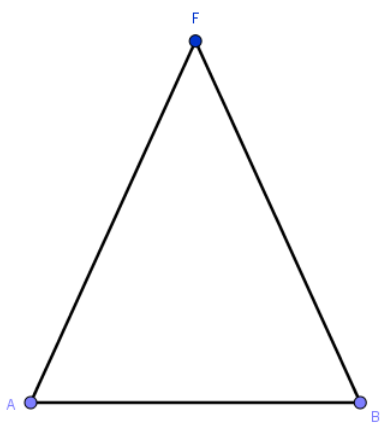
1. Encontrar el valor de X, sabiendo que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{AB}$

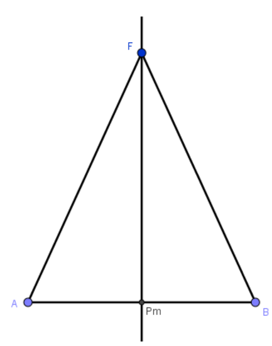


Solución: 84°

2. En el siguiente triángulo isósceles, construir la altura, la mediana y la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y verificar que las tres coinciden.

Solución:





POLÍGONOS

Es una figura geométrica plana compuesta por un número finito de segmentos rectos consecutivos que encierran una región en el plano. Estos segmentos se denominan lados.

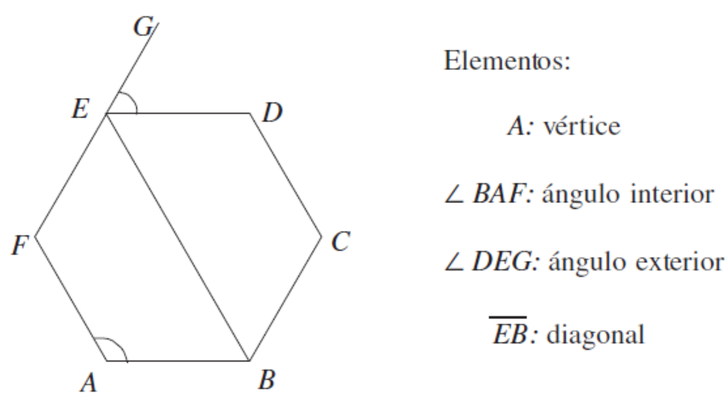
Elementos
Todo polígono está formado por los siguientes elementos:

Vértice, es el punto donde concurren dos lados.
Ángulo interior, es el que se forma por dos lados adyacentes de un polígono.
Ángulo exterior, es aquel que se forma entre la prolongación de uno de sus lados y su lado adyacente.
Diagonal, es el segmento de recta que une dos vértices no adyacentes.

Clasificación de los polígonos:

Simple, si ningún par de lados no consecutivos se corta, es decir, su frontera tiene un solo contorno.
Complejo o cruzado, si dos de sus lados no consecutivos se intersecan.
Equilátero, si tiene todos sus lados del mismo tamaño.
Equiángulo, si tiene todos sus ángulos interiores iguales.
Regular, si es equilátero y equiángulo al mismo tiempo.
Irregular, si no es regular. Es decir, si no es equilátero o equiángulo.

Un polígono tiene el mismo número de lados que de ángulos interiores, así como exteriores.



Número de diagonales de un polígono
Desde un vértice se pueden trazar *n-3* diagonales, donde n es el número de lados, luego el número total de diagonales es *n(n-3) /2*, ya que cada diagonal se cuenta en dos vértices.
Así que número total de diagonales *D*, que se pueden trazar desde todos los vértices de un polígono de *n* lados es:
$D = n(n-3)/2$

Suma de los ángulos internos de un polígono.

El polígono más sencillo es el triángulo y sabemos que la suma de sus ángulos internos es 180°. El que le sigue es en cuadrado, pero podemos dividirlo en dos triángulos trazando una diagonal, por lo que la suma de sus ángulos internos es igual a la de dos triángulos, es decir, 2*180° = 360°. Para un pentágono se pueden trazar dos diagonales partiendo de un mismo vértice, lo que nos genera tres triángulos, cuya suma de ángulos es 3*180° = 540°. En un hexágono podemos trazar tres diagonales desde un mismo vértice, cuatro en un heptágono y así sucesivamente, por lo que podemos generalizar el número de diagonales desde un mismo vértice como n-3, dónde n es el número de lados del polígono. Estas diagonales nos formaran n-2 triángulos, ya que una diagonal nos genera dos triángulos, dos diagonales tres y así sucesivamente.

Como cada triángulo suma 180°, tenemos en general que la suma de los ángulos internos de un polígono es 180(n-2).
Así la suma de los ángulos internos de un polígono es 180(n-2), donde n es el número de lados.

Perímetro
El perímetro es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana.
Perímetro de un círculo

El perímetro de un círculo es una circunferencia cuya longitud está dada por,

$$P = \pi d = 2\pi r$$

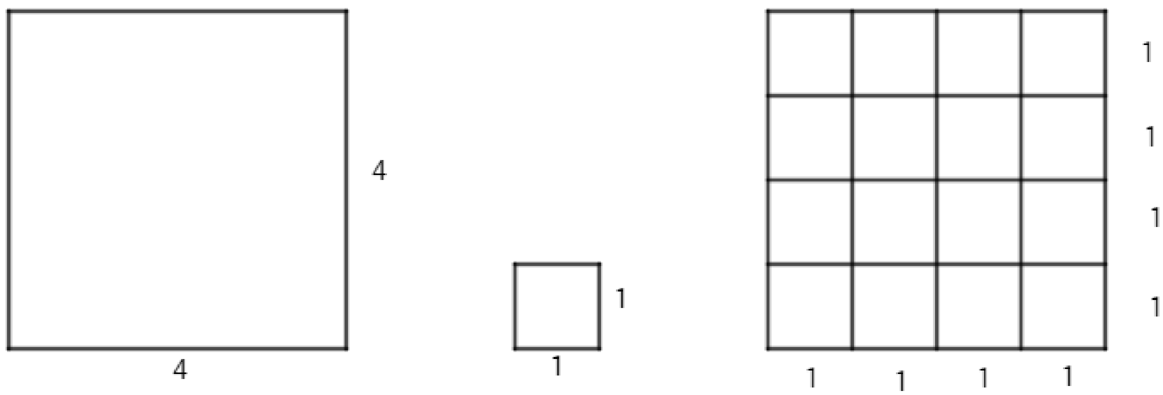
Dónde:

P es la longitud del perímetro,
π es una constante que vale aproximadamente 3.1416,
r es la longitud del radio,
d es la longitud del diámetro.

Área
Es una medida que nos proporciona el tamaño de una región encerrada por una figura geométrica, se expresa en unidades de superficie, que se definen como unidades de longitud al cuadrado (cm^2, m^2, km^2, etc.)

Cálculo de áreas
Se determina cuántas veces contiene a otra superficie conocida que se utiliza como unidad. Se define el área del cuadrado de lado 1 como unidad de superficie.

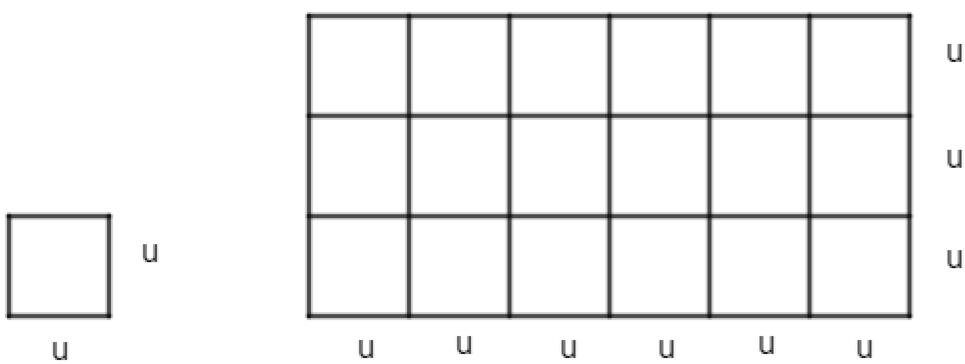
Área del cuadrado
Si se considera un cuadrado de 4 cm de lado y se compara su tamaño con un cuadrado de 1 cm de lado, se observa en la figura que lo contiene exactamente 16 veces.



El área del cuadrado mayor es de 16 cm^2 y se obtiene multiplicando uno de sus lados por sí mismo (4 x 4 = 16). El área del cuadrado menor es 1 cm^2. Por lo que tenemos que, Área del cuadrado = lado por lado = lado al cuadrado, es decir:

$$\boldsymbol{A = l \times l = l^2}$$

Donde, ***A*** es el área y ***l*** la longitud del lado.
Área del rectángulo
Si la unidad de medir áreas es un cuadrado de lado ***u***, con un área de $\boldsymbol{u^2}$, entonces para obtener el área de un rectángulo basta con contar cuántos cuadrados de área $\boldsymbol{u^2}$ caben en él.

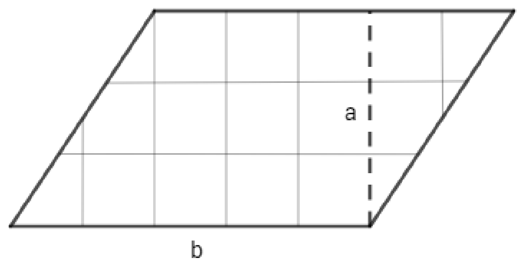


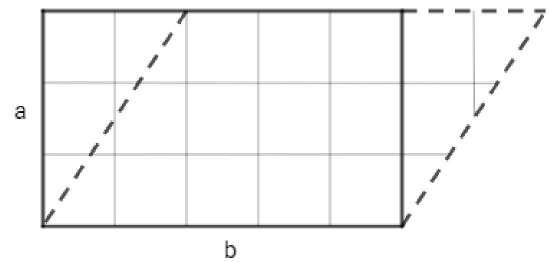
En el rectángulo anterior se puede observar que la base se forma con seis unidades y su altura se forma con tres unidades, por lo que el número de cuadrados unidad que contiene es el producto de 6 ***u*** por 3 ***u*** que es igual a 18 $\boldsymbol{u^2}$
Por lo que si la base del rectángulo mide ***b*** unidades lineales y de altura mide ***a*** unidades lineales, entonces el área del rectángulo corresponde al producto de su base por su altura:

$$\boldsymbol{A = b \times a}$$

Área de un paralelogramo

Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales, para calcular su área se descompone en dos partes para formar con éstas un rectángulo de la misma área como se muestra en la siguiente figura:



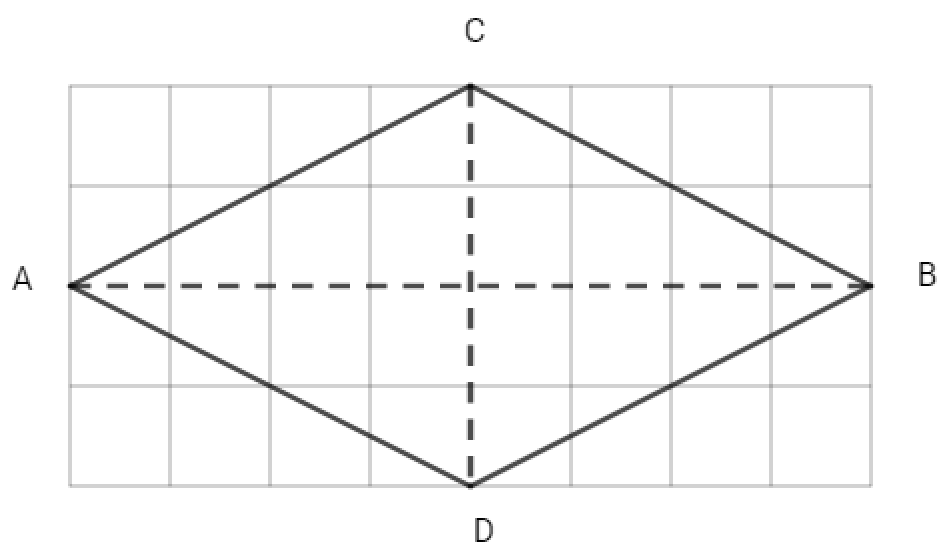


Por lo que se tiene que el área del paralelogramo se obtiene multiplicando la longitud de su base por la longitud de su altura, es decir:

$$A = b \times a$$

Área de un rombo

Un rombo es un paralelogramo cuyos lados son iguales, si se multiplican las diagonales AB y CD del rombo ABCD, es equivalente a multiplicar la base por la altura del rectángulo que lo contiene.

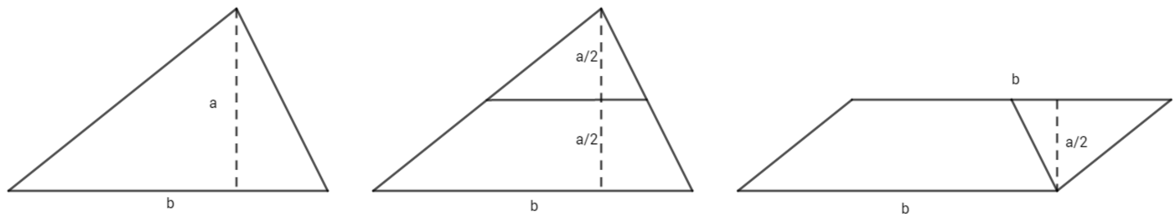


Se observa que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo que lo contiene, por lo tanto, el área de un rombo es igual a la mitad del producto de sus diagonales.

$$A = \frac{D_1 x D_2}{2}$$

Área de un triángulo

Un triángulo se puede descomponer en dos partes para formar con éstas un paralelogramo de igual área como se muestra en la figura:



Por lo que se tiene que el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura:

$$A = \frac{bxa}{2}$$

UNIDAD IV. CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS

PROPÓSITO DE LA UNIDAD: Al finalizar la unidad, el alumno aplicará los conceptos de congruencia y semejanza y usará el Teorema de Pitágoras en la resolución de problemas que involucren triángulos. Argumentará deductivamente sobre la validez de algunas afirmaciones geométricas y procesos en la resolución de problemas.

APRENDIZAJES.

Con relación a los conocimientos, habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:

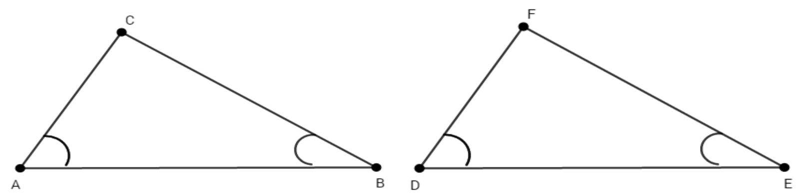
- Utilizará correctamente la notación propia de la congruencia.
- Comprenderá el concepto de congruencia.
- Construirá segmentos y ángulos congruentes.
- Reconocerá cuándo dos triángulos son congruentes con base en la definición.
- Argumentará empíricamente la validez de los criterios de congruencia.
- Argumentará deductivamente la validez de algunas construcciones geométricas y de algunas afirmaciones.
- Aplicará los criterios de congruencia de triángulos para justificar congruencia entre lados, ángulos y triángulos.
- Resolverá problemas, por medio de los criterios de congruencia.
- Utilizará correctamente la notación propia de la semejanza.
- Comprenderá el concepto de semejanza.
- Reconocerá cuándo dos figuras son semejantes.
- Reconocerá cuándo dos triángulos son semejantes con base en la definición.
- Establecerá como válidos los criterios de semejanza.
- Calculará perímetros y áreas en triángulos semejantes y la razón entre ellos.
- Aplicará los criterios de semejanza en la resolución de problemas.
- Divide un segmento en *n* partes iguales y a partir de esta construcción infiere el Teorema de Thales.
- Reconocerá y justificará el Teorema de Pitágoras y su recíproco, desde el punto de vista geométrico y algebraico.
- El alumno utiliza los conocimientos adquiridos en esta unidad, en la resolución de problemas.

CONGRUENCIA

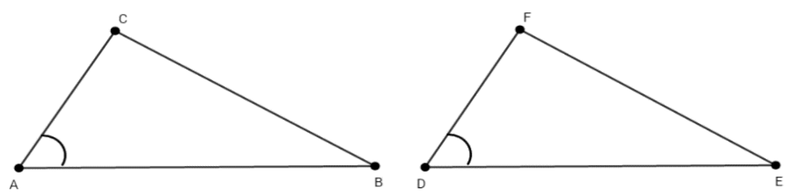
En matemáticas, dos figuras geométricas son congruentes si tienen los lados correspondientes iguales y los ángulos correspondientes iguales.
Congruencia de triángulos: Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.
Ángulos homólogos. Se dicen ángulos homólogos aquellos que son iguales.

Criterios de congruencia:

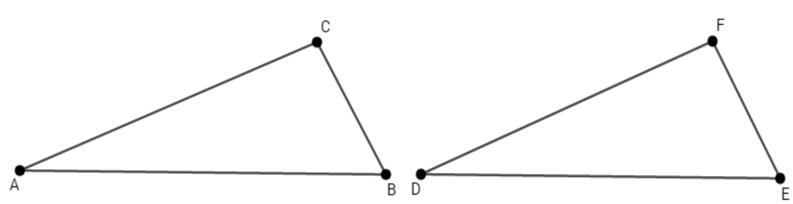
ALA. Dos triángulos son congruentes cuando tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a ese lado son respectivamente iguales a los ángulos adyacentes del otro



LAL. Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales.



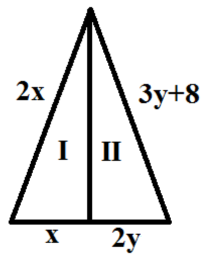
LLL. Dos triángulos son congruentes si tienen iguales todos sus lados.



$$AB = DE$$
$$BC = EF$$
$$AC = DF$$

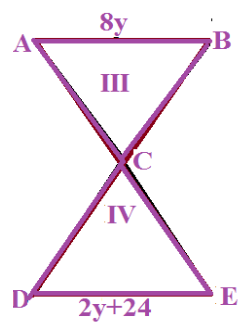
EJERCICIOS DE CONGRUENCIA

1.- El triángulo I y II son congruentes ¿Cuáles son los valores de “ x ” y “ y ” y las dimensiones del triángulo?



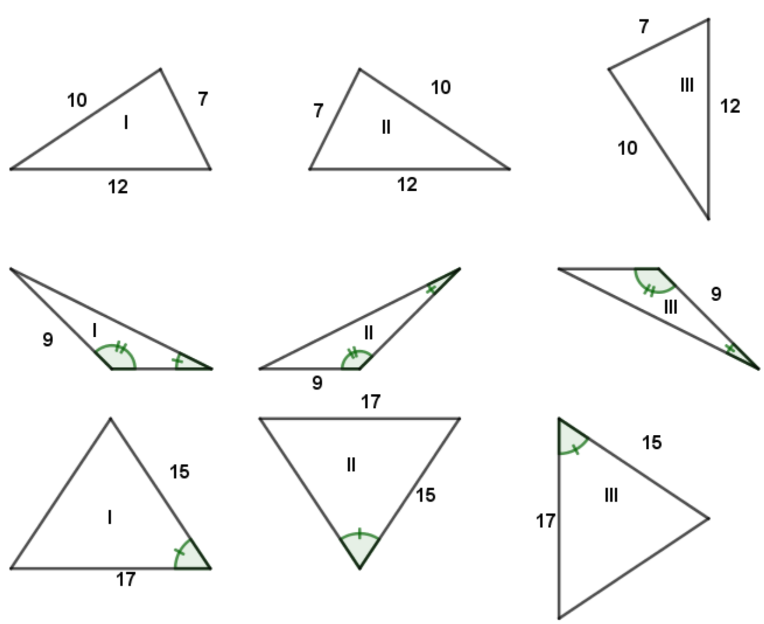
Solución: x = 16, y = 8, los lados del triángulo miden 32 cada uno.

2.- El triángulo III y el triángulo IV son congruentes según se indica ¿cuál es el valor de “y” y de los lados AB y DE?



Solución: y = 4, AB = 32 y DE = 32.

3.- En los casos siguientes decir cuáles triángulos son congruentes y establecer el criterio de congruencia respectivo.

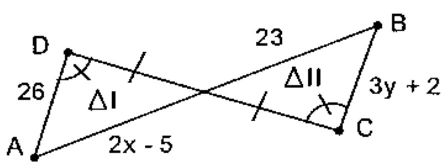


Respuestas:

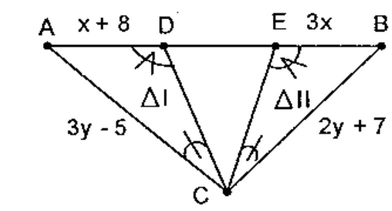
a) Triángulos I, II y III son congruentes por el criterio LLL
b) Triángulos I y II son congruentes por el criterio ALA
c) Triángulos I y III son congruentes por el criterio LAL

4.-Determina los valores de “x” y de “y”, sabiendo que los triángulos I y II son congruentes.

a)



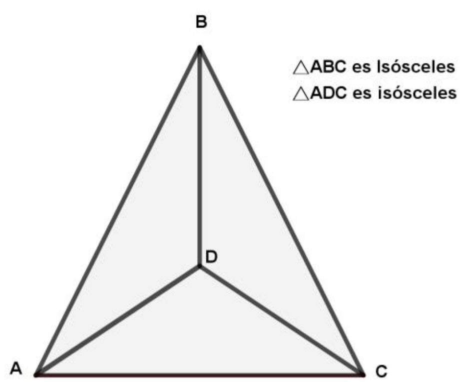
b)



Solución:

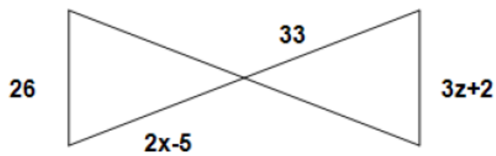
a) x = 14; y = 8.
b) x = 4; y = 12.

5.-Demostrar que los triángulos son congruentes y que criterio lo rige

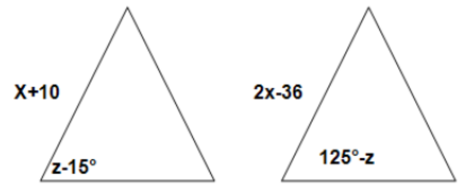


6.-Hallar el valor de “x” y ”z”, en cada par de triángulos congruentes

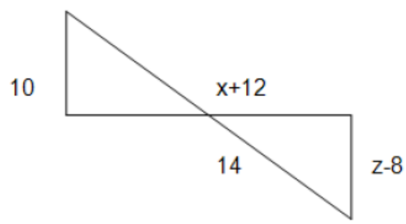
a)



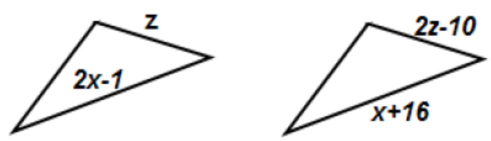
b)



c)



d)

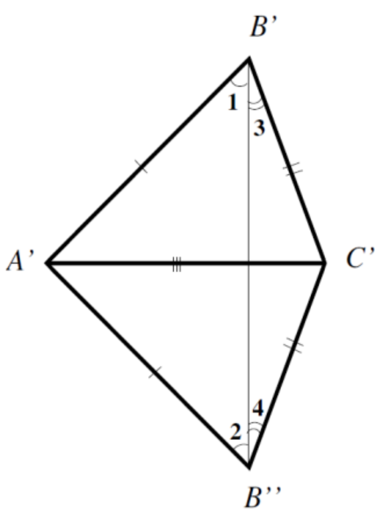


Solución:

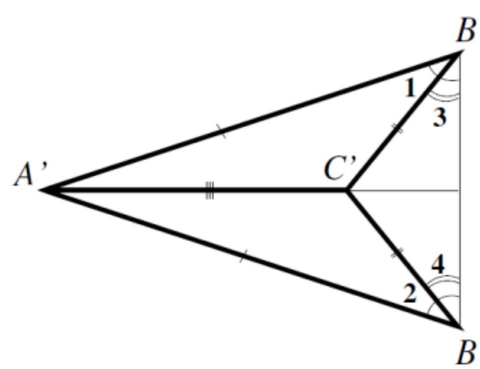
a) x = 19; z = 8
b) x = 46; z = 70°
c) x = 2; z = 18
d) x = 17; z = 10

7.-Demostrar que los triángulos son congruentes.

a)

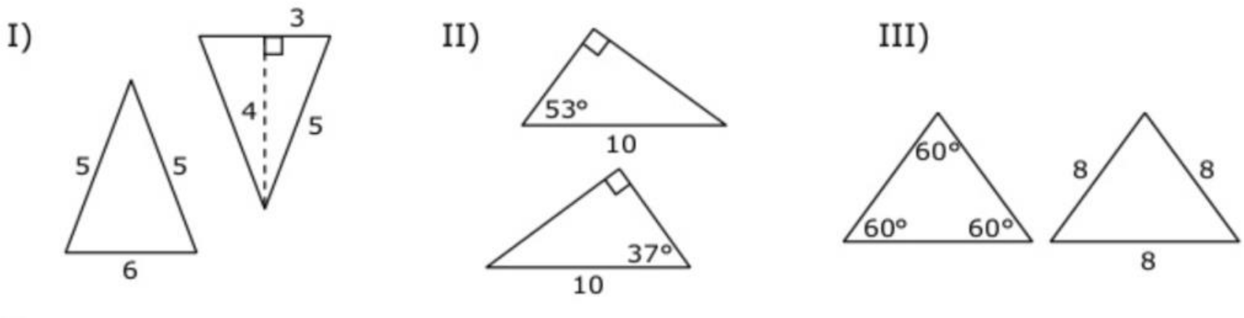


b)

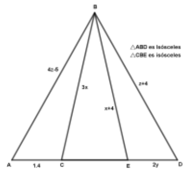


8) -Se muestra una pareja de triángulos congruentes en la siguiente figura.

a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) Sólo I y II
e) Sólo I, II y III



9.-Demuestre si los triángulos son congruentes o semejantes y que postulado lo afirma.



SEMEJANZA

En matemáticas el concepto de semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad. Se dice que dos objetos son semejantes si "guardan" una proporción entre ellos.

Por ejemplo:

Una fotografía de la misma persona se amplía al doble de tamaño. Ambas son semejantes y tienen una misma proporción, ya que una es la ampliación de la otra tanto a lo ancho como a lo largo y con una misma razón, o sea, las divisiones de sus lados correspondientes son de igual valor.

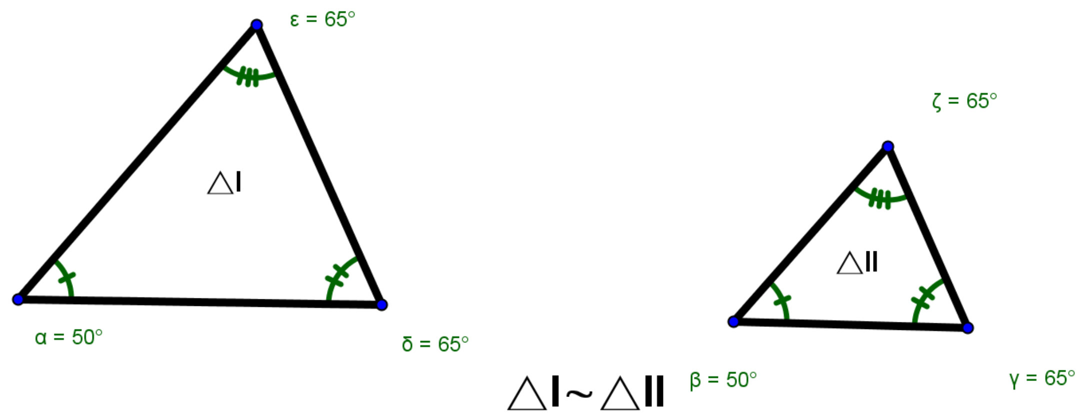
Dos anillos de diferente diámetro son semejantes porque guardan la misma proporción entre cada una de sus partes (circunferencia, radio, diámetro).

Triángulos semejantes

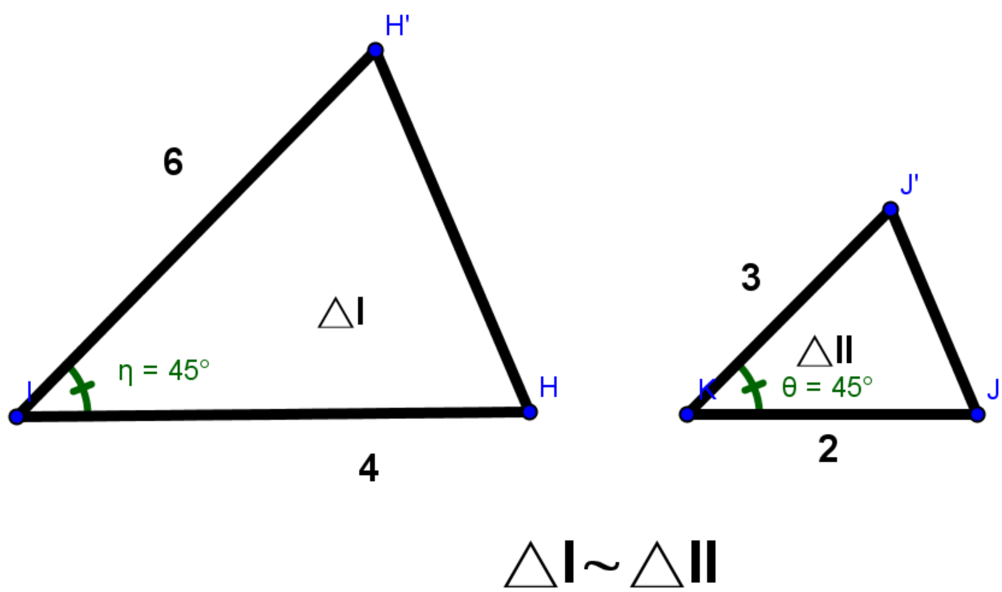
Los triángulos semejantes son aquellos que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, es decir, dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos son proporcionales (lados homólogos son los opuestos a ángulos iguales).

Si los triángulos y *A´B´C´* son semejantes, se expresa como: ~ *A´B´C´*, donde el símbolo **~** denota semejanza, y se lee: “el triángulo *ABC* es semejante al triángulo *A´B´C´*”. Una forma de comprobar lo anterior es construyendo dos triángulos con los mismos ángulos pero con diferentes medidas de sus lados.

Postulado Ángulo-Ángulo-Ángulo (AAA). Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos respectivamente congruentes**.**
Otra forma equivalente de enunciarlo es el **Postulado Ángulo-Ángulo (AA)**. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.

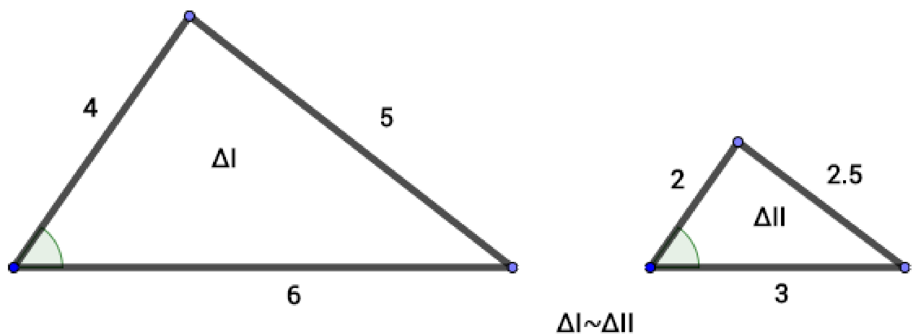


Postulado Lado-Ángulo-Lado (LAL). Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente congruentes un ángulo comprendido entre dos lados proporcionales.



Postulado Lado-Lado-Lado (LLL). Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales, como en el siguiente ejemplo:

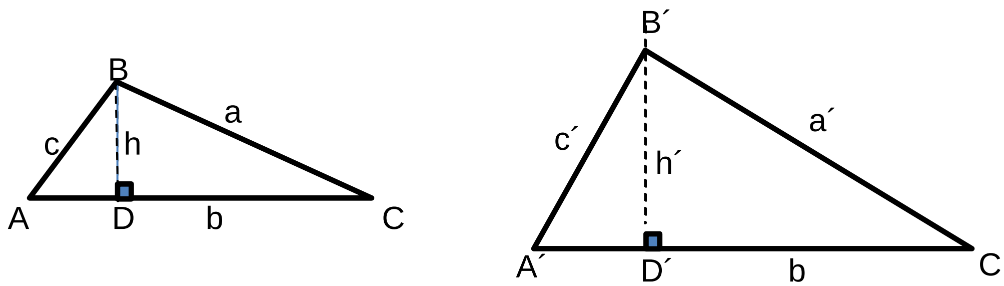
$$\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{5}{2.5} = 2$$



SEMEJANZA DE ÁREAS

Definiremos brevemente que el área es una región limitada por un polígono. Podríamos decir además que es un número real.

Teorema
Si dos triángulos son semejantes, entonces la razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de dos lados correspondientes cualesquiera.



Demostración
Se da que $\triangle ABC \sim \triangle A´B´C´$. Sean *A1* y *A2* sus áreas. En la notación habitual tenemos, $\frac{a´}{a} = \frac{b´}{b} = \frac{c´}{c}$

Llamaremos a r el valor común de las tres fracciones y queremos verificar que

$$\frac{A_2}{A_1} = r^2$$

Sean $\overline{BD}$ y $\overline{B´D´}$ las alturas desde B y $B´$ en los dos triángulos, h y $h´$ son las longitudes. Por otro lado $\angle A \cong \angle A´$, debido a que Además $\angle ADB \cong \angle A´D´B´$ porque los dos ángulos son rectos y dado que existe una correspondencia entre dos triángulos, si dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una semejanza, por lo que se deduce

$$\triangle ABD \sim \triangle A´B´D´$$

$$\therefore \frac{b´}{b} = \frac{h´}{h} = r$$

Como los lados correspondientes son proporcionales esto significa que

$b´ = rb$, y

$h´ = rh$

Por otro lado

$A_1 = \frac{1}{2}bh$ y $A_2 = \frac{1}{2}b´h´$,

Por lo tanto

$$A_2 = \frac{1}{2}b´h´ = \frac{1}{2}(rb)(rh) = \frac{1}{2}r^2bh$$

Por lo que queda demostrado : $\frac{A_2}{A_1} = r^2$

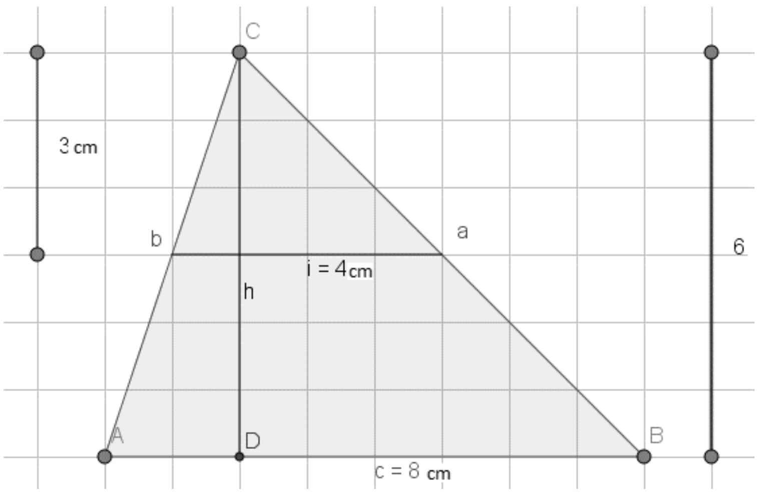
Problemas de aplicación

1. Dos polígonos son semejantes con razón de semejanza 3. Si el área del menor es de 15 cm^2, halla el área del mayor.

Respuesta

$$\frac{A}{A'} = \frac{A}{15} = 3^2 \quad \Rightarrow \; A = (9)(15) = 135cm^2$$

2. Calcula la razón de semejanza de las áreas de los dos triángulos de la figura.



Respuesta.

Calculamos el área de las dos figuras

$$A = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\text{cm}^2$$

$$A' = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{A}{A'} = \frac{24}{6} = 4 = r^2 \qquad \Rightarrow \quad r = 2$$

3. Un lado de un triángulo mide 18.5 m y el lado correspondiente de otro triángulo semejante mide 3.7 m. Si el área del primer triángulo mide 16 m^2. ¿Cuánto mide el área del triángulo semejante?

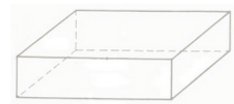
Respuesta

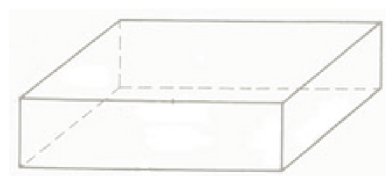
Calculamos la razón de semejanza entre los dos lados:

$$r = \frac{18.5}{3.7} = 5$$

$$\frac{A'}{A} = 5^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A'}{16} = 5^2 \quad \Rightarrow A' = (25)(16) = 400m^2$$

4. Una arista de un ortoedro[5] mide 5 cm, y la arista correspondiente de otro ortoedro semejante mide 15 m. El área del primer ortoedro mide 80 m^2. Halla el área del otro ortoedro semejante.





Respuesta

Se calcula la razón de semejanza entre las dos aristas:

$$r = \frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{A'}{A} = 3^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A'}{80} = 3^2 \quad \Rightarrow A' = (9)(80) = 720m^2$$

5. El área de dos triángulos semejantes son 144 cm^2 y 81 cm^2. Si la base del triángulo mayor es de 30 cm, ¿cuál es la base correspondiente del triángulo menor?

Respuesta

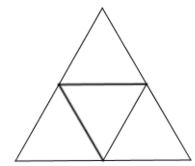
Se calcula la razón de semejanza de las áreas:

$$\frac{A'}{A} = \frac{144}{81} = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$r = \frac{a'}{a} = \frac{30}{a} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(30)(3)}{4} = \frac{90}{4} = 22.5cm$$

[5] Un ortoedro es un paralelepípedo ortogonal, es decir, cuyas caras forman entre sí ángulos diedros rectos. Los ortoedros son prismas rectos, y también son llamados paralelepípedos rectangulares. Por ejemplo, una caja de zapatos.

6. Un triángulo equilátero tiene 40 cm^2 de área. Encuentra el área del triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados.



$$r = \frac{a'}{a} = \frac{1}{2}$$

$$r^2 = \frac{A'}{A} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4}(40) = 10cm^2$$

7. Si dos pentágonos regulares A y B son semejantes, ¿cuáles de las siguientes igualdades son ciertas?

a) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{B}} = \dfrac{\textbf{Apotema de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Apotema de } \boldsymbol{B}}$

b) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{B}} = \dfrac{\textbf{Área de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Área de } \boldsymbol{B}}$

c) $\dfrac{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Perímetro de } \boldsymbol{B}} = \dfrac{\textbf{Diagonal de } \boldsymbol{A}}{\textbf{Diagonal de } \boldsymbol{B}}$

Respuesta

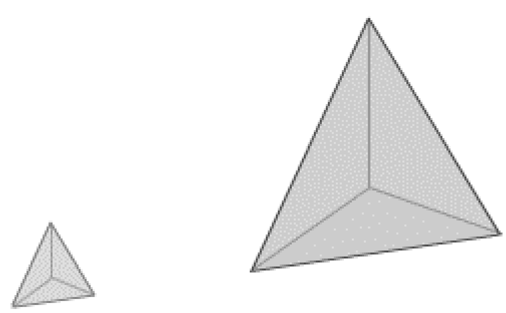
a) y c) son ciertas mientras que b) es falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.
b) es Falsa, ya que la razón de semejanza de las superficies es el cuadrado de la razón de longitudes.

SEMEJANZA DE VOLÚMENES

Si dos figuras A y B son semejantes, el cociente entre el volumen de B y el de A es el cubo de la razón de semejanza de la figura B sobre la A.

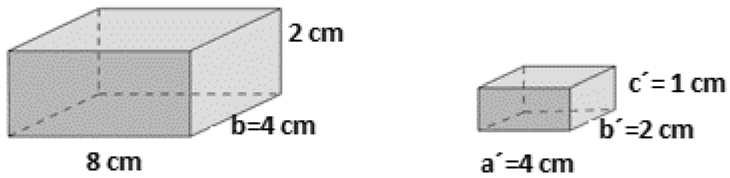
$$razón^3 = \frac{Volumen\ mayor}{Volumen\ menor'}$$

$$r^3 = \frac{V'}{V}$$



Ejemplos

1. Calcula la razón de semejanza de los dos volúmenes

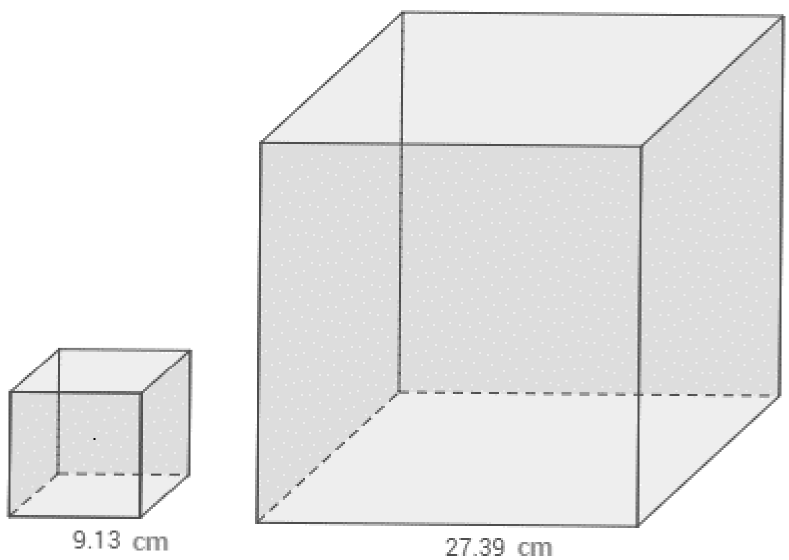


Respuesta

$V = a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 4 \cdot 2 = 64cm^3$

$V´ = a´ \cdot b´ \cdot c´ = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8cm^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{V´} = \frac{64}{8} = 8 = r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{8} = 2$

2. Calcula la razón de semejanza de los dos volúmenes



Respuesta

$V = a \cdot b \cdot c = 9.13 \cdot 9.13 \cdot 9.13 = 761.048497cm^3$

$V´ = a´ \cdot b´ \cdot c´ = 27.39 \cdot 27.39 \cdot 27.39 = 20{,}548.309419cm^3$

$\Rightarrow \quad r^3 = \frac{V}{V´} = \frac{20{,}548.309419}{761.048497} = 27 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{27} = 3$

3. El volumen de una escultura es 300 m^3 ¿Cuál será el volumen de su maqueta a escala 1:40?

Respuesta

$$r = \frac{Volumen\ representado}{Volumen\ real} = \frac{1}{40}$$

$$r = \frac{Volumen\ real}{Volumen\ representado} = \frac{40}{1}$$

$$V_{mayor} = r^3 \cdot V_{menor}$$

$$300 = 40^3 \cdot V_{menor}$$

$$300 \cdot 40^3 = V_{menor}$$

$$0.0046875 m^3 = V_{menor}$$

4. Una esfera cuyo radio es r = x cm tiene un área de 80 cm^2 y un volumen de 130 cm^3. Calcula el área y el volumen de otra esfera cuyo radio es R = 3x.

Respuesta

Calcula la razón de semejanza entre las dos aristas $r = \frac{3x}{x} = 3$

$$r^2 = \frac{A'}{A} = 3^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{A'}{80} = 3^2 \quad \Rightarrow \quad A' = (3^2)(80) = 720 cm^2$$

$$r^3 = \frac{V'}{V} = 3^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{V'}{130} = 3^3 \quad \Rightarrow \quad V' = (3^3)(130) = 1170 cm^3$$

PROBLEMAS DE APLICACION

1. Dos rectángulos tienen sus lados proporcionales. Los lados del primero miden 6 y 8 cm respectivamente. Si el perímetro del segundo es 14 cm, ¿cuál es la razón de semejanza de sus áreas?

R = 4

2. Dos circunferencias tienen por radios 7 cm y 49 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza de sus áreas?

R=1/49

3. La razón de semejanza entre los volúmenes de dos cubos es 27. ¿Cuál es la razón de semejanza entre sus aristas? ¿Y entre sus áreas?

R = 3 (aristas), R = 9 (áreas)

4. Una empresa que se dedica a construcción, realizo una maqueta a escala 1:90 de un nuevo edificio, con forma de pirámide cuadrangular. La maqueta tiene la altura de la pirámide de 5,3 dm y el lado de la planta es de 2,4 dm. Calcula el volumen real del edificio expresando en metros cúbicos el resultado.

R = 7 418,304 m^3

5. Los lados de dos pentágonos regulares miden 7 cm y 5 cm, respectivamente. ¿Son semejantes los dos polígonos regulares? Si la respuesta es afirmativa, calcula la razón de semejanza entre sus áreas.

R = 49/25

6. La arista de un dado de parchís mide 1 cm y la del de la oca mide 1,5 cm. Calcula la razón de semejanza entre sus aristas. ¿Cuántas veces es más grande el dado de la oca que el del parchís? ¿Cuántas veces es más grande el área de cada cara del dado de la oca comparado con el de parchís?

R: razón = 1.5, razón entre áreas = 2.25, razón entre volumen = 3.375

7. Calcular cuántas veces es más grande una pizza familiar que una pequeña si el radio de la familiar es 40 cm y el de la pequeña es 25cm.

R = 64/25

8. Dos polígonos semejantes tienen perímetros de 130 y 240 cm, respectivamente. ¿Cuánto mide el lado del primer polígono homólogo al lado del segundo cuyo valor es 37 cm?

R = 20

9. Un rectángulo tiene dimensiones 3 cm $\times$6 cm. Calcula el área y las dimensiones de otro rectángulo semejante a él, sabiendo que la razón entre sus áreas es de $\frac{9}{4}$.

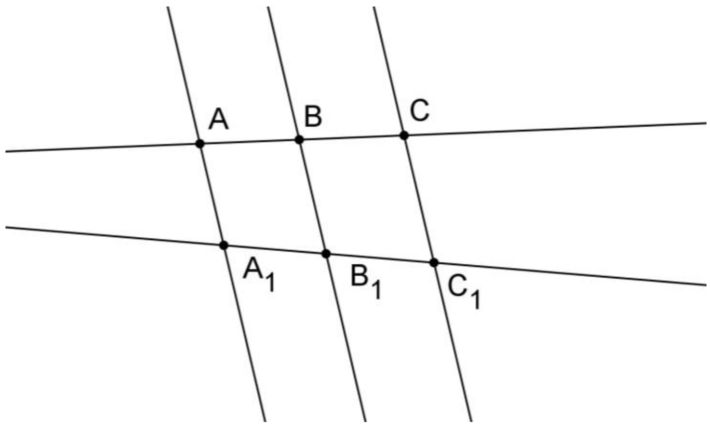
R = área 8 cm, dimensiones 2 y 4 cm.

10. Un tetraedro mide 8 cm de lado y la razón de semejanza con otro tetraedro más pequeño es $\frac{1}{4}$. ¿Cuánto mide la arista del segundo tetraedro? ¿Cuál es la razón de semejanza entre sus áreas? ¿Y entre sus volúmenes?

R = 2,1/16,1/64

TEOREMA DE THALES

Si dos rectas no paralelas están situadas en un mismo plano, son intersecadas por dos o más líneas paralelas, los segmentos qué se determinan en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes a la otra recta.
En la siguiente figura se muestra la condición antes mencionada: Se aplica el TEOREMA DE THALES.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \quad \text{o} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$

El teorema de THALES también se aplica a triángulos y polígonos cuando en estos se trazan líneas paralelas o bisectrices bajo los siguientes criterios:

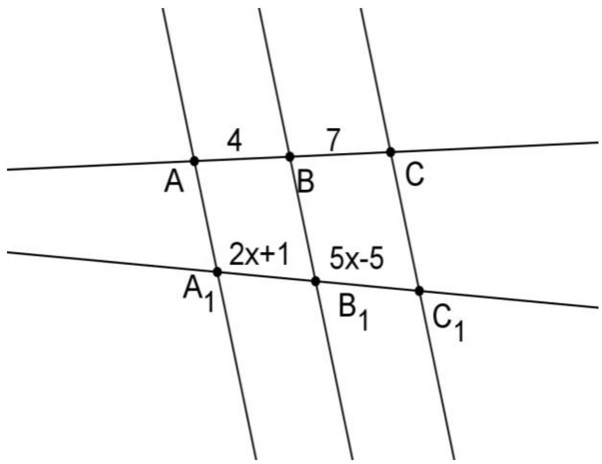
a) Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo entonces los otros dos lados son divididos en segmentos proporcionales.

b) Dos transversales cualesquiera cortadas por tres o más paralelas quedan divididas en segmentos proporcionales.

c) La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes a ese ángulo.

EJEMPLOS RESUELTOS

1.- Determina el valor de x, el valor de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DF}$, de la figura siguiente:



Donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ y por lo tanto se establece la siguiente proporción:

$$\frac{5x-5}{2x+1}=\frac{7}{4}$$

eliminando denominadores se tiene

$$4(5x-5)=7(2x+1)$$

desarrollando la expresión se tiene:

$$20x-20=14x+7$$

simplificando y agrupando terminos semejantes

$$20x-14x=7+20$$
$$6x=27$$

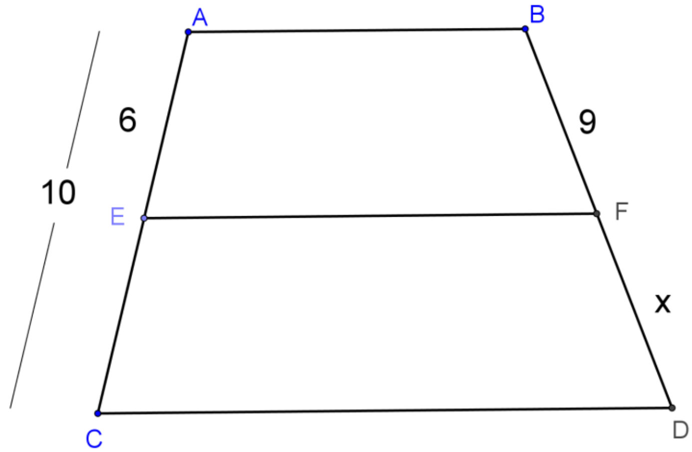
despejando a x se tiene

$$x=\frac{27}{6}$$
$$\therefore x=4.5$$

los segmentos miden:

$2x+1=2(4.5)+1$	$5x-5=5(4.5)-5$
$2x+1=9+1$	$5x-5=22.5-5$
$2x+1=10$	$5x-5=17$

2.- En el siguiente polígono determinar el valor de x.



Donde $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ y $\overline{EC} = 4$

Se establece la siguiente proporción.

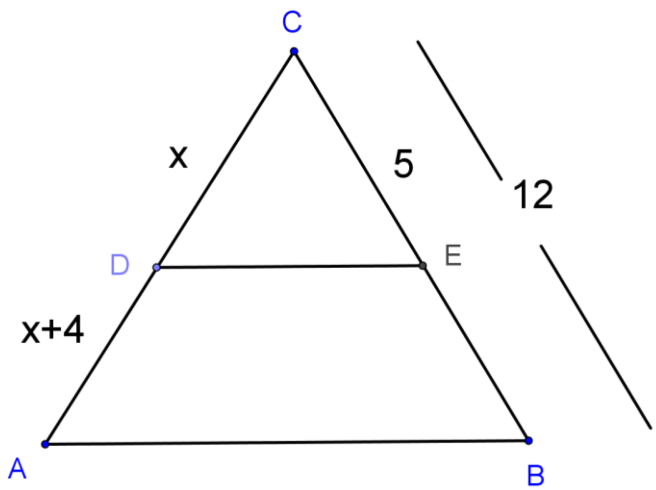
$$\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$$

$$x = \frac{4(9)}{6}$$

$$x = \frac{36}{6}$$

$$x = 6$$

3.- Determina el valor de x en el triángulo siguiente:



Donde $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, de la figura se determina que $\overline{BE} = 7$

Se establece la proporción:

$$\frac{x}{x+4} = \frac{5}{7}$$

eliminando denominadores se tiene:

$$7x = 5(x+4)$$

desarrollando la expresión

$$7x = 5x + 20$$

agrupando terminos semejantes

$$7x - 5x = 20$$

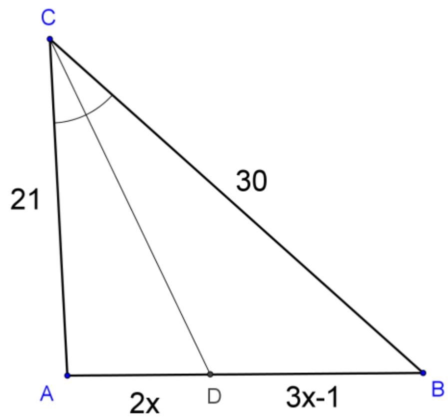
simplificando y resolviendo se tiene

$$2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

4.-Determina el valor de x en la siguiente figura:



Donde $\overline{CD}$ es bisectriz del $\angle C$ de donde

$$\frac{3x-1}{2x}=\frac{30}{21}$$

eliminando los denominadores se tiene

$$21(3x-1)=30(2x)$$

desarrollando se tiene

$$63x-21=60x$$

agrupando terminos semejantes se tiene

$$63x-60x=21$$

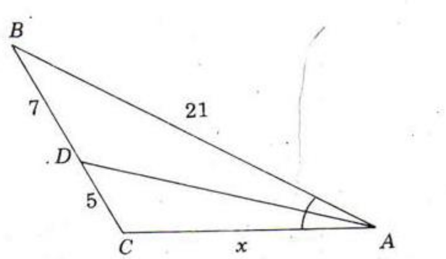
simplificando y resolviendo se tiene

$$3x=21$$

$$x=\frac{21}{3}=7$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.

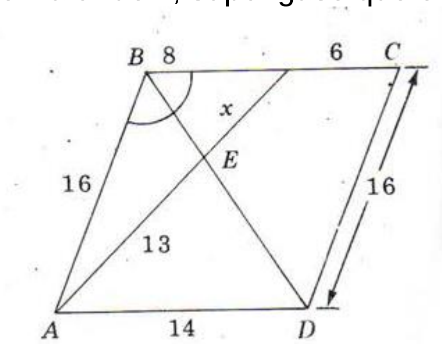
1.- Determina el valor de x, supóngase que el segmento AD es bisectriz del ángulo



.-

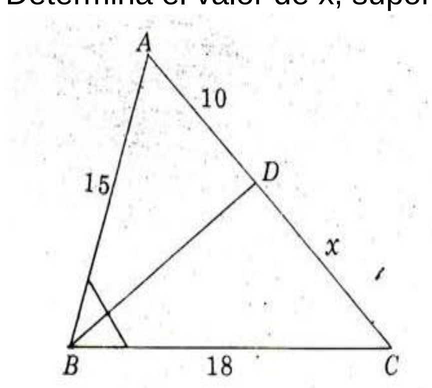
Respuesta x=15

2.-Determina el valor de x, supóngase que el segmento BD es bisectriz.



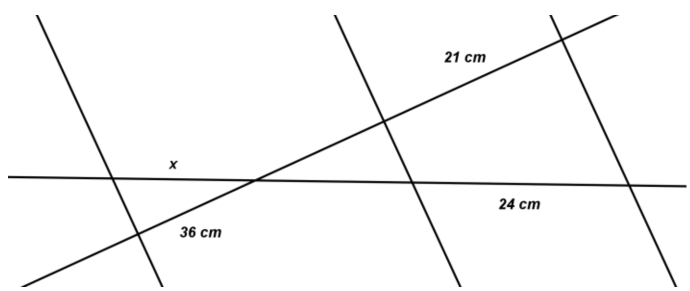
Respuesta: x = 6.5

3.- Determina el valor de x, suponiendo que el segmento BD es bisectriz.



Respuesta x=12

4.- Determina el valor de x, suponiendo que las rectas son paralelas.

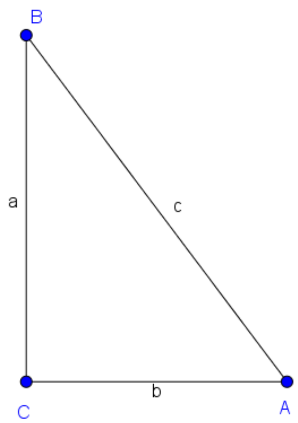


Respuesta x=41.1 cm

.

TEOREMA DE PITÁGORAS

"En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

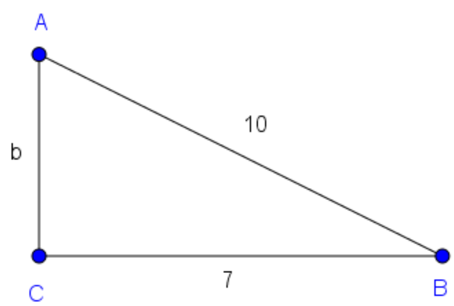


$$c^2 = a^2 + b^2$$

C: hipotenusa
a, b: catetos
Catetos. Son los lados que forman el ángulo recto $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.
Hipotenusa. Es el lado opuesto al ángulo recto (90^0) y es el lado más grande del triángulo: $\overline{AB}$.

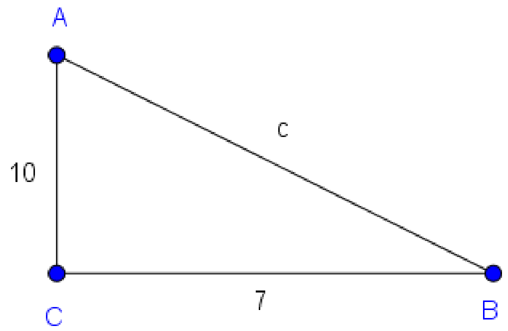
Ejemplos resueltos
I. Dados los siguientes triángulos obtener los datos faltantes, el ángulo C es recto.

1.-



$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \sqrt{10^2 - 7^2}$$
$$b = \sqrt{100 - 49}$$
$$b = \sqrt{51} = 7.14$$

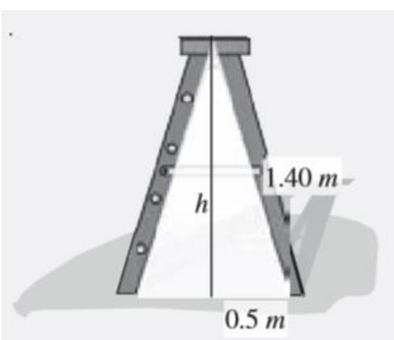
2.-



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$c = \sqrt{7^2 + 10^2}$$
$$c = \sqrt{49 + 100}$$
$$c = \sqrt{149} = 12.2$$

Ejemplos resueltos, problemas de aplicación

1. Al abrir una escalera de pintor, se forma un triángulo isósceles, la distancia entre las bases es de 1 m y los lados iguales miden 1.40 m. Determina la altura de la escalera.



Solución

La altura de un triángulo isósceles divide a la base en dos partes iguales, formándose 2 triángulos rectángulos:
De acuerdo al teorema de Pitágoras:
c= 1.40
a= 0.5
b= h

Sustituyendo en:

$c^2 = a^2 + b^2$

nos quedará

$1.40^2 = 0.5^2 + h^2$

Despejando h^2

$h^2 = 1.40^2 - 0.5^2$

$h^2 = 1.71$

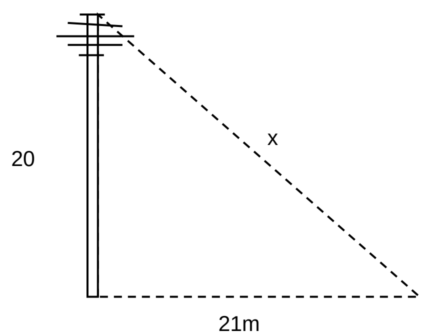
Sacamos la raíz

$h = \sqrt{1.71}$

$h = 1.30$

Por consiguiente, la altura de la escalera es de 1.30 m.

2. Calcular la longitud de un cable que sostiene una antena de 20 m de altura, sabiendo que sobre el suelo la distancia de la antena al cable es de 21 m.



$a = 20 \qquad b = 21$

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$

$x = \sqrt{20^2 + 21^2}$

$x = \sqrt{400^2 + 441^2}$

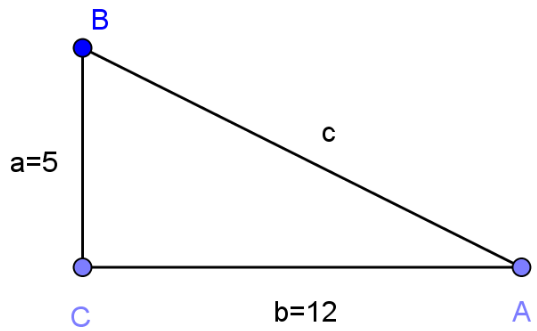
$x = \sqrt{841}$

$x = 29$

EJERCICIOS

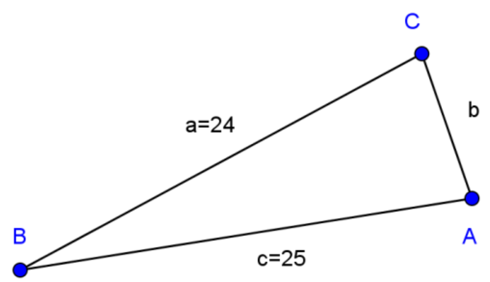
Resuelve los siguientes triángulos rectángulos, donde el ángulo C es recto.

1.-



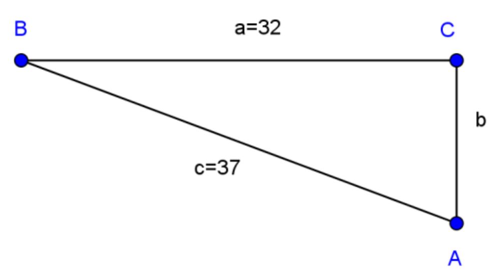
R = 13

2.-



R = 7

3.-



R = 18.57

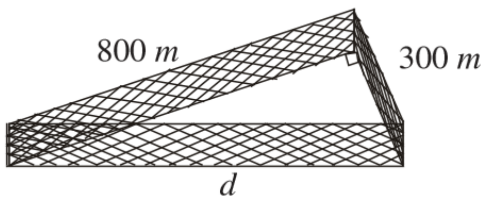
4.- Se deja caer una piedra desde la parte alta de la torre de Pisa y cae a 4.76 m de la base de ésta, sabiendo que la torre mide 91 m, ¿Qué altura tiene la torre?

R = 90.87m

5.- ¿Cuánto mide la diagonal de un terreno rectangular de 56 m de largo y 33 m de ancho?

R = 65 m

6.- Se tiene un terreno en forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 300 y 800 m. ¿Qué cantidad de malla se necesita para cercarlo?



R = 1954.40 m

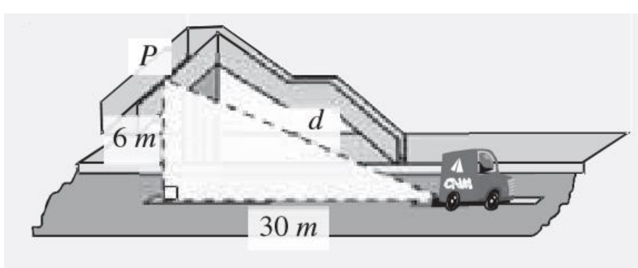
7.- ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 8 m?

R = 5.65 m

8.- ¿Calcula la altura de un triángulo equilátero que de lado mide 10 cm.

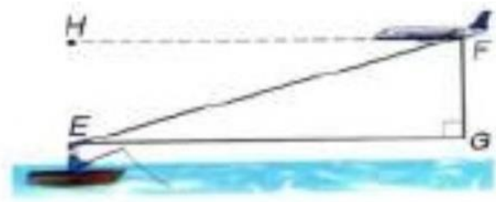
R = 8.66 m

9.- Un automóvil viaja a una velocidad constante de 2.5 m/s y pasa por debajo de un puente peatonal. Determina a los 12 s, la distancia entre el automóvil y el punto ubicado exactamente arriba del paso del mismo, si la altura del puente es de 6 m.



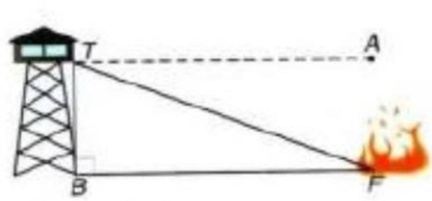
R = 30.59 m

10.- Un pescador se encuentra a 12 km de una ciudad que está a 0 km sobre el nivel del mar, desde allí observa un avión, que volaba a 10500 m de altura, sobre la ciudad ¿A qué distancia se encuentra el avión del pescador?



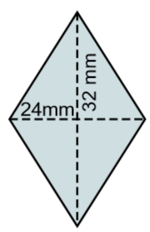
R = 15945.21 m

11.- Desde la parte superior de una torre que mide 45.5 m de alto se observa un incendio a 2 km de la base de la torre. ¿A qué distancia de la punta de la torre esta el incendio?



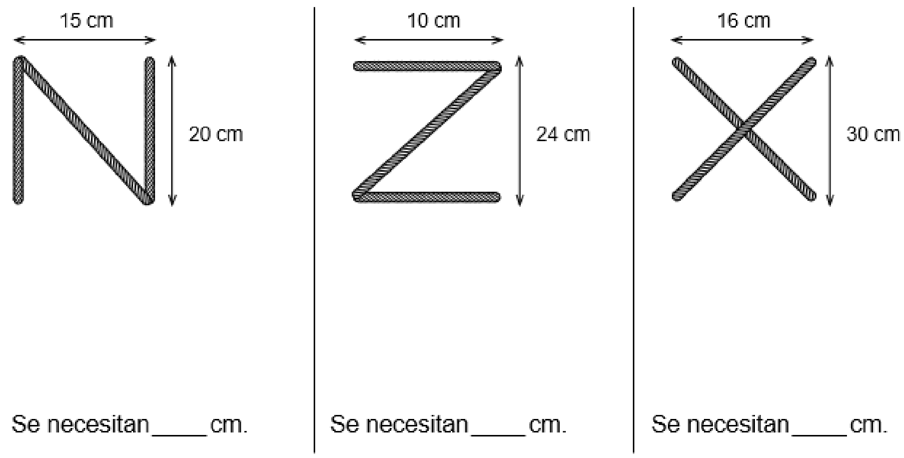
R = 2000.51 m

12.- Calcula el lado de un rombo cuyas diagonales miden 32 mm y 24 mm.



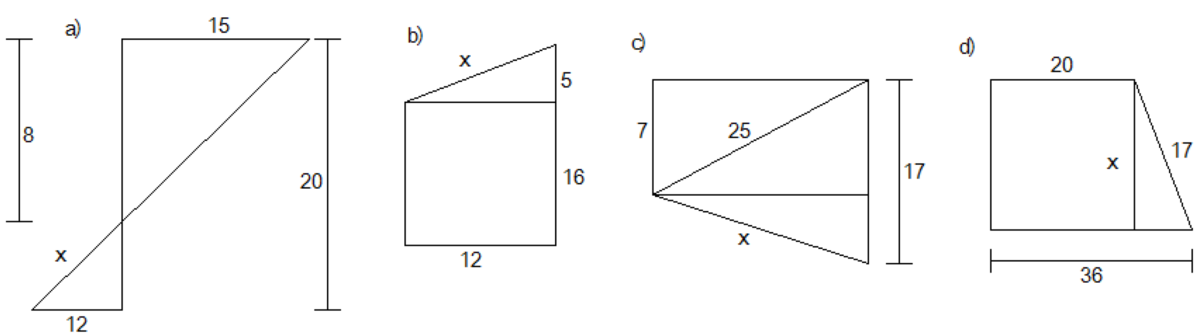
R = 20 mm

13.- Calcula los centímetros de cuerda que se necesitan para formar las letras N, Z y X de las siguientes dimensiones.



R = 65 cm R = 46 cm R = 68 cm

14.- Encontrar el valor de x utilizando el Teorema de Pitágoras.



a) $x = \sqrt{288}$ unidades
b) x = 13 unidades
c) x = 26 unidades
d) $x = \sqrt{33}$ unidades

BIBLIOGRAFIA.

Guía de estudio de Matemáticas II, Seminario de matemáticas turno matutino, Agosto de 2012.

Cuéllar Carvajal, Juan Antonio, Matemáticas II Geometría y Trigonometría, México, Mc Graw Hill, 2ª edición 2009, 326 pp.

Ibáñez Carrasco, Patricia y García Torres, Gerardo, Matemáticas II Geometría y Trigonometría, México, Cengage Learning Editores, 2008, 218 pp.

Lial, Margaret L., et al, Trigonometría, México, Pearson Educación, Octava edición 2006, 448 pp.

Ortiz Campos, Francisco José, Matemáticas 3 Geometría y Trigonometría, México, Publicaciones Cultural, Segunda reimpresión 1997, 299 pp.

Prado, Santiago, et al, Precálculo. Enfoque de resolución de problemas, México, Pearson Educación, 2006, 672 pp.

Valiente Barderas, Santiago y Rubio Ramírez, Santiago, Trigonometría, México, Limusa Noriega Editores, 2ª edición 2000, 443 pp.