UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL NAUCALPAN

ÁREA DE MATEMÁTICAS

TURNO MATUTINO

GUÍA DE ESTUDIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

ENERO DEL 2010

ELABORARON:
Pedro Clavijo Valdez
Florencio Vera Butanda

INTRODUCCIÓN

Esta colección de ejemplos y ejercicios pretende servir como una guía para presentar el examen extraordinario de Cálculo Diferencial e Integral II correspondiente al Área de Matemáticas, Turno Matutino. Los autores esperan que te sea útil, esto será en la medida que la leas y trates de entender lo que hay en ella y resolviendo los ejercicios planteados, recuerda solo es una guía, trata de complementarla con lo visto durante tu curso y con la bibliografía que se te proporciona, también aprovecha la inmensa variedad de recursos que la era moderna nos ha puesto en bandeja los programas que se te proporcionan en la bibliografía son una excelente muestra de ello. Es recomendable que inicies tu estudio leyendo los ejercicios resueltos y la pequeña parte de teoría que la guía contiene, después trata de resolver los ejercicios que leíste sin verlos para que adquieras confianza, compara tus respuestas y autoevalúate, no importa que te equivoques, es normal todos lo hacemos pero trata de hacerlo lo menos posible esto último significa que entiendes lo que estás haciendo y que estás en el camino correcto. Finalmente trata de resolver la totalidad de los ejercicios y cuando tengas duda en cómo resolver alguno pide una sugerencia y solo eso a alguien.

Como te lo mencionamos trata de sacar provecho de la tecnología, pero úsala como herramienta, no abuses.

Nos sería grato escuchar tus críticas sobre las dificultades que tuviste al trabajar con ella, los errores (que seguramente abundan) con el fin de mejorarla para tu beneficio.

Está basada en el Programa Oficial formulado por el CCH, el cual a manera de resumen presentamos a continuación:

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA

-Cálculo de una variable, trascendentes tempranas.J.Stewart.ITP.2001

-Cálculo.Hughes.et.al.CECSA.1995.

-Cálculo Aplicado.S.Warner.Thomson.2002.

-Software de uso libre para uso de este curso:

Geogebra en www.geogebra.org
Winplot
Graphmatica.

UNIDAD I

DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTES

En esta primera unidad del curso de cálculo II se trabajan derivadas de funciones exponenciales y trigonométricas, funciones que se estudiaron ampliamente en el curso de Matemáticas IV, por lo que sería conveniente que repases parte de lo visto en dicho curso, a continuación se proporciona la parte teórica indispensable para la resolución de los ejercicios.

FORMULARIO BÁSICO PARA DERIVAR FUNCIONES TRASCENDENTES

Para $u = f(x)$ diferenciable se tiene:

$$\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \frac{d}{dx}(u)\ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(sen\ u) = \cos u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -sen\ u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(tg\ u) = \sec^2 u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(ctg\ u) = -\csc^2 u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\ tg\ u \frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(\csc\ u) = -\csc u\ ctg\ u \frac{d}{dx}(u)$$

EJERCICIO

Realiza el siguiente ejercicio usando el formulario y siguiendo los ejemplos resueltos:

1) $y = e^{4x+5}$ su derivada usando la fórmula $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{d}{dx}(u)$ con $u = 4x+5$

Tenemos que $\frac{d}{dx}(e^{4x+5}) = e^{4x+5}\frac{d}{dx}(4x+5) = e^{4x+5}(4) = 4e^{4x+5}$.

2) Si $y = e^{2x^2+3x-3}$ entonces $\frac{dy}{dx} =$

3) Si $y=e^{\sqrt{x^2-9}}$ entonces $\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x^2-9}}\right)=$

4) Como un ejemplo más complicado calculemos la derivada de $y=e^{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-5}}}$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-5}}}\right)=e^{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-5}}}\,\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{(x-5)(2)-(2x+1)(1)}{(x-5)^2}\right)=$$

$$e^{\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+5}}}\,\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x-5}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{-11}{(x-5)^2}\right)=\frac{-11e^{\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-5}}}}{3(x-5)\sqrt[3]{(2x+1)^2(x-5)}}$$

5) Si $y=e^{\frac{2x-4}{3x-2}}$ entonces $\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{2x-4}{3x-2}}\right)=$

6) Como ejemplo calculemos la derivada de $y=e^{\ln^2(x^2+3)}$ entonces $\frac{d}{dx}(e^{\ln^2(x^2+3)})=$

$$e^{\ln^2(x^2+3)}\,\frac{d}{dx}(\ln^2(x^2+3))=e^{\ln^2(x^2+3)}\left[2\ln(x^2+3)\frac{d}{dx}(\ln(x^2+3))\right]=$$

$$e^{\ln^2(x^2+3)}\left[2\ln(x^2+3)\left(\frac{2x}{x^2+3}\right)\right]=\frac{4xe^{\ln^2(x^2+3)}\ln(x^2+3)}{x^2+3}$$

7) Si $y=\frac{e^{\frac{3x}{5}}}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ su derivada es usando fórmula para derivar cocientes, la regla de la cadena y la de la exponencial natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{\frac{3x}{5}}}{\sqrt{x^2-6x+5}}\right)=\frac{\sqrt{x^2-6x+5}\,\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{3x}{5}}\right)-e^{\frac{3x}{5}}\,\frac{d}{dx}\left((x^2-6x+5)^{\frac{1}{2}}\right)}{x^2-6x+5}=$$

$$\frac{\sqrt{x^2-6x+5}\;e^{\frac{3x}{5}}\left(\frac{3}{5}\right)-e^{\frac{3x}{5}}\left(\frac{1}{2}(x^2-6x+5)^{-\frac{1}{2}}(2x-6)\right)}{x^2-6x+5}$$

Simplifica, hasta donde te sea posible, esta derivada

8) Calcula $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\right)=$

9) Calcula $\frac{d}{dx}\left(e^{e^x}\right)=$

10) Calcula $\frac{d}{dx}\left(x^7 e^{-3\ln x}\right)=$

11) Observa el siguiente ejemplo resuelto para que pongas en práctica la derivada de funciones exponenciales de base distintas a e.

$$\frac{d}{dx}\left(4^{\frac{x}{2}}\right)=4^{\frac{x}{2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\ln 4=4^{\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\ln 4=\frac{4^{\frac{x}{2}}\ln 4}{2}$$

Ahora calcula:

12) $\frac{d}{dx}\left(18^{2x^5-4}\right)=$

13) $\frac{d}{dx}\left(3^{\sqrt{6x+9}}\right)=$

14) $\frac{d}{dx}\left(2^{5x}3^{4x^2}\right)=$

15) $\frac{d}{dx}\left(5^{\sqrt{x^4+x^3-x^2}}\right)=$

Ahora pongamos en práctica la derivada de las funciones logarítmicas.

Para $u=f(x)$ diferenciable se tiene que $\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{d}{dx}(u)$, por lo tanto:

16) $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(3x^3-2x+2\right)\right)=\frac{1}{3x^3-2x+2}\frac{d}{dx}\left(3x^3-2x+2\right)=\frac{9x^2-2}{3x^3-2x+2}$

Calcula:

17) $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\sqrt{x+3}}{5x+1}\right)=$

18) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{\ln x^4}\right)=$

19) Si tenemos $y = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ usando la fórmula para derivar un producto de funciones y la fórmula para derivar el logaritmo natural tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right) = x\ \frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{d}{dx}(x) =$$

$$x\ \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\ \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)(1) =$$

$$x\ \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$$\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) =$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

Recuerda que la función logaritmo, en particular el logaritmo natural, tiene entre muchas otras importantes propiedades:

i) $\ln AB = \ln A + \ln B$

ii) $\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$

iii) $\ln A^n = n\ln A$ Para ciertos números reales A, B, n

20) Con esto trata de terminar el siguiente ejercicio:

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(5x-7)^3(2x^2+7)^4\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln(5x-7)^3+\ln(2x^2+7)^4\right) = \frac{d}{dx}\left(3\ln(5x-7)+4\ln(2x^2+7)\right)$$

21) $\frac{d}{dx}\left(8^{x\ln x}\right) =$

Si la base del logaritmo es distinta de e, a es positivo y u diferenciable se tiene que:

$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$ Usando esta fórmula pueden hacerse los siguientes ejercicios:

22) $$\frac{d}{dx}\left(\log_4\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{1}{\ln 4\,\dfrac{x}{x^2-1}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{x^2-1}{\ln 4(x)}\left(\frac{(x^2-1)(1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}\right) =$$

$$\frac{x^2-1}{(\ln 4)(x)}\left(\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\right) = \frac{-(x^2+1)}{\ln 4(x^3-x)}.$$

23) Usando la propiedad de los logaritmos $\log_a\frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ se tiene que:

$\log_4 \frac{x}{x^2-1} = \log_4 x - \log_4(x^2-1)$ Comprueba que los resultados obtenidos concuerdan, al derivar esta última función.

24) Calcula $\frac{d}{dx}\left(x\log_8 \sqrt{x}\right)$=

25) Calcula $\frac{d}{dx}\left(\log_{17}(2x^4-4x)\right) =$

26) Calcula $\frac{d}{dx}\left(\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right)$=

El siguiente ejercicio lo haremos usando propiedades de logaritmos tales como:

$\log_a X^n = n \ \log_a X$

$\log_a \frac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$

27)

$$\frac{d}{dx}\left(\log_5 \sqrt{\frac{2x}{-3x+3}}\ln 5\right) = \frac{d}{dx}\left(\log_5\left(\frac{2x}{3-3x}\right)^{\frac{1}{2}}\ln 5\right) =$$

$$\frac{1}{2}\ln 5\frac{d}{dx}\left(\log_5 \frac{2x}{3-3x}\right) = \frac{\ln 5}{2}\frac{d}{dx}\left(\log_5(2x) - \log_5(3-3x)\right) =$$

$$\frac{\ln 5}{2}\left(\frac{2}{2x\ln 5} - \frac{-3}{(3-3x)\ln 5}\right) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2(1-x)}$$

28) Calcula $\frac{d}{dx}\left(\log_7\left(\frac{3^x}{x^3+2}\right)\right)$=

Pondremos en práctica las derivadas de las funciones trigonométricas:

29) Si tenemos $y = sen(\sqrt{x}+8x+4)$ entonces su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(sen(\sqrt{x}+8x+4)\right) = \cos(\sqrt{x}+8x+4)\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}+8x+4) =$$

$$\cos(\sqrt{x}+8x+4)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+8\right) = \cos(\sqrt{x}+8x+4)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+8\right).$$

Ahora calcula

30) $\frac{d}{dx}(\cos(3x^2 - \frac{2}{x} + 3x))$=

31)
$$\frac{d}{dx}\left(sen^5(3x-5)\right)=5sen^4(3x-5)\frac{d}{dx}(sen(3x-5))=5sen^4(3x-5)\cos(3x-5)(3)$$
$$=15sen^4(3x-5)\cos(3x-5)$$

32) $\frac{d}{dx}\left(sen(3x-5)^5\right)=$

33) $\frac{d}{dx}\left(sen(e^{x^3})\right)=$

34) $$\frac{d}{dx}\left(\cos^{14}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)=14\cos^{13}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)=$$
$$14\cos^{13}\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(-sen\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{-14sen\left(\frac{x-1}{x}\right)\cos^{13}\left(\frac{x-1}{x}\right)}{x^2}$$

35) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{5x+sen4x}}\right)=$

36) $\frac{d}{dx}\left(\cos(7x+2)^2-\cos^2(7x+2)\right)=$

37) $\frac{d}{dx}\left(sen^2(x^3)\cos(x^3)\right)=$

38) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{sen^3(x^2+1)}\right)=$

39) $\frac{d}{dx}\left(2sen\left(\frac{x+3}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\frac{2}{x}\right)=$

40) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\pi}sen\frac{\pi}{3}+7x\cos x\right)=$

41) $\frac{d}{dx}\left(sen(xe^{x^5})\right)=$

42) $\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{5x+2}\right)=$

43) $\frac{d}{dx}\left(\cos x^3-\frac{1}{3}\cos^3 x^3\right)=$

44) $\frac{d}{dx}\left(\left(1+\cos 3x\right)\left(x-sen9x\right)\right)=$

45) $\frac{d}{dx}\left(\cos^6\frac{x}{3}-sen\left(x^3+1\right)^3\right)=$

46) $\frac{d}{dx}\left(tg(2x^2+3x+5)\right)=$

47)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}tg^3x-tgx^3+\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(tg^3x\right)-\frac{d}{dx}\left(tg\ x^3\right)+\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=$$

$$\frac{1}{3}\left(3\ tg^2x\ \sec^2 x\right)-\sec^2 x^3\left(3x^2\right)+\frac{1}{3}\left(3x^2\right)=tg^2x\sec^2 x-3x^2\sec^2 x^3+x^2$$

48) $\frac{d}{dx}\left(\frac{tg^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=$

49) $\frac{d}{dx}\left(ctg\sqrt{e^x+1}\right)=$

50)

$$\frac{d}{dx}\left(ctg\frac{8-3x}{7}\right)=-\csc^2\left(\frac{8-3x}{7}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{7}-\frac{3x}{7}\right)=$$

$$-\csc^2\left(\frac{8-3x}{7}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{3}{7}\csc^2\left(\frac{8-3x}{7}\right)$$

51) $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{ctgx}\right)=$

52) $\frac{d}{dx}\left(\sec x^3-\csc x^2\right)=$

53) $\frac{d}{dx}\left(\left(5x+1\right)\left(\csc^3\frac{x}{3}\right)\right)=$

54) $\frac{d}{dx}\left(\csc 3^{2x}\right)=$

55) $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sec 5x+tg5x\right)\right)=$

56) $\frac{d}{dx}\left(\left(x^2+ctg(x-5)\right)\sec\sqrt{x}\right)=$

57) $\frac{d}{dx}\left(x\sec^2 x+ctgx\right)=$

58) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+tg\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right)=$

59)

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\csc\frac{x}{2}}\right)=\frac{d}{dx}\left(\left(\csc\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\csc\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(\csc\frac{x}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\csc\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\csc\frac{x}{2}\ ctg\frac{x}{2}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{-\sqrt{\csc\frac{x}{2}}\ ctg\frac{x}{2}}{4}$$

60) $\frac{d}{dx}\left((\sec 4x+tg\,2x)^5\right)=$

PROBLEMAS OPCIONALES

REALIZA LAS GRAFICAS DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, USANDO CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS.

61) $f(x)=sen^2x-\cos x \quad 0\le x\le 2\pi$
62) $f(x)=x+senx \quad 0\le x\le 2\pi$
63) $f(x)=senx+\cos x \quad 0\le x\le 2\pi$

Resuelve los siguientes problemas, usando el criterio de la primera o segunda derivada para extremos relativos para el primero y el concepto de velocidad instantánea para el segundo.

64) Cuando se dispara un gol de campo el alcance (la distancia horizontal desde donde se patea el balón hasta dónde cae al suelo) bajo ciertas condiciones está dado por:

$R=\frac{v_0{}^2 sen2\theta}{g}$ donde v_0 es la velocidad con que se disparó el balón(es una constante) g es la aceleración de la gravedad, tomarla como $10\,m/s^2$.Y θ es el ángulo con que el balón sale disparado con respecto al suelo. Esto es $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, ¿Cuál es el ángulo que maximiza el alcance?

65) Una ola tsunami es una onda marina causada por un maremoto. Es conocido que estas ondas han sido estudiadas a través de funciones trigonométricas de la forma $y=a\cos bt$.Si una ola tiene una altura de *8m* y un periodo de *30s*. ¿Cuán rápidamente asciende o desciende la ola cuando $y=3m$?

CUESTIONARIO DE EVALUACIÒN

1. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x) = sen^2 x$?

a) $2\cos 2x$ b) $4\cos 2x$ c) $2\ sen\ 4x$ d) $sen\ 2x$

2. La derivada de la función $f(x) = x\ sen\ 3x$ es:

a) $3\cos 3x$ b) $sen\ 3x + 3\cos 3x$ c) $\cos 3x$ d) $sen\ 3x + 3x\cos 3x$

3. La primera y segunda derivada de la función $f(x) = e^{-x}$ es:

a) $f'(x) = e^{-x}$ $f''(x) = e^{-x}$ b) $f'(x) = -e^{-x}$ $f''(x) = e^{-x}$

c) $f'(x) = -x\,e^{-x-1}$ $f''(x) = -x(-x)\,e^{-x-2}$ d) $f'(x) = -e^{-x}$ $f''(x) = -e^{-x}$

4. Si $f(x) = \ln\sqrt{e^{6x}(\ sen\ 4x)}$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$, entonces $f'(x)$ es:

a) $3 + 2\cot 4x$ b) $3 - 2\cot 4x$ c) $3 + 2\tan 4x$ d) $3 - 2\tan 4x$

5. Si $\dfrac{df}{dx} = x^x$ $para\ x > 0\ y\ g(x) = f\left(x^2\right)$, entonces ¿Cuál es la derivada de $\dfrac{dg}{dx}$?

a) $x^{\left(2x^2\right)}$ b) $x^{\left(x^2+1\right)}$ c) $2x^{2x^2+1}$ d) $2x^{(x+1)}$

6. Una función creciente en todo su dominio es:

a) x^2 b) e^x c) e^{-x} d) $e^{sen\,x}$

7. Si $y = sen\,u,\quad u = v^2$, y $v = 4x$, entonces $\dfrac{dy}{dx} =$

a) $32x\cos 16x^2$ b) $8x\ sen\ 16x^2$ c) $4x\ sen\ 4x$ d) $32\cos 8x^2$

8. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 5^{3x}$ en $x = 1$ es:

a) 125 b) 125 c) $125\ln 125$ d). $\ln 125$

9. Si $f(x) = e^{-2x}$, entonces $f^{iv}(x)$ es:

a) $16\,e^{-x}$ b) $16\,e^{-2x}$ c) $-8\,e^{-2x}$ d) $8\,e^{-2x}$ e) $-16\,e^{-2x}$

10. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen la propiedad qué $f''(x) = -f(x)$?

a) $f(x) = sen\ x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = e^{-x}$ d). $f(x) = \ln x$

11. Si $y = \ln 4x + 4^x$, entonces $\dfrac{dy}{dx} =$

a) $\dfrac{4}{x} + x\,4^{x-1}$ b) $\dfrac{1}{x} + 4^x$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{x} + 4^x\ln 4$

12. La derivada de $y = \log_8\sqrt{x+1}$ es:

a) $\dfrac{1}{x+1}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ c) $\dfrac{1}{2(x+1)}$ d) $\dfrac{1}{2(x+1)\ln 8}$

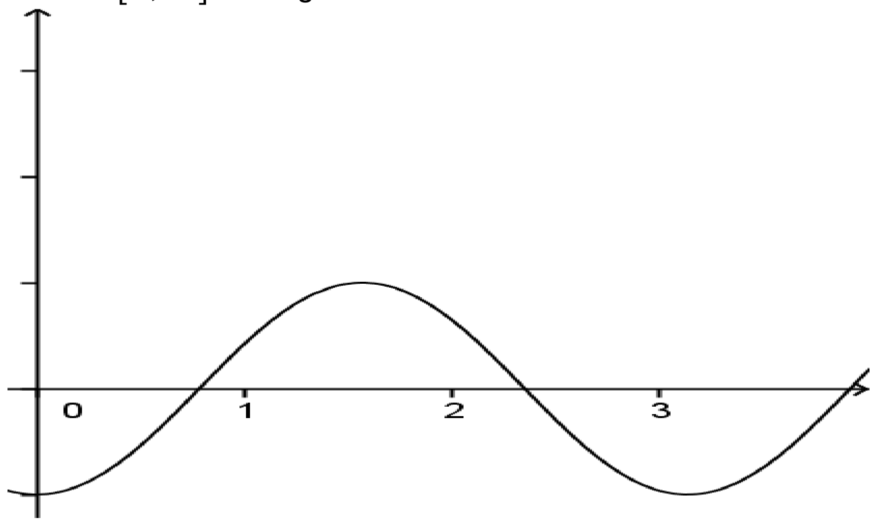
13. Si $y = sen\,u, u = 3w,\ y\ w = e^{2x}$, entonces $\dfrac{dy}{dx} =$

a) $6\,e^{2x}\cos\left(3e^{2x}\right)$ b) $3\cos e^{2x}$ c) $e^{2\cos\left(3e^{2x}\right)}$ d) $-6\ sen\left(6\,e^{2x}\right)$

14. El resultado de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}$ (x en radianes) es:

a) 1 b) 0 c) no existe d) 4

15. En el intervalo $\left[\ 0, \pi\ \right]$ de la gráfica:



¿Dónde están los puntos de inflexión para la función?

a) En $x=0$ y $x=\pi$ b) En $x=\dfrac{\pi}{2}$ c) En $x=\dfrac{\pi}{4}$ y $x=\dfrac{3\pi}{4}$ d) No hay en este intervalo

16. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ en el punto donde $x=2$?

a) 1 b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{4}{7}$ d) $\dfrac{3}{5}$

17. Si $y=\dfrac{senx}{\cos x}$, entonces $\dfrac{dy}{dx}=$

a) $\dfrac{sen^2 x}{\cos^2 x}$ b) $\dfrac{\cos x}{-senx}$ c) $\sec^2 x$ d) $\dfrac{1}{x} sen\ x+\ln(\cos\ x)$

18. Al calcular $\dfrac{d\left(\sqrt{\sec x}\ \right)}{dx}$ obtienes:

a) $\cos x$ b) $\sec x \tan x$ c) $\dfrac{\tan x\sqrt{\sec x}}{2}$ d) $x \cos x$

19. ¿Cuál es la derivada de la función $f(x)=ctg^2\sqrt{x}$?

a) $-\csc^2\sqrt{x}$ b) $-\dfrac{ctg\sqrt{x}\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ c) $\csc^2\sqrt{x}$ d) $\dfrac{ctg\sqrt{x}\csc^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

20. La ecuación de la recta tangente a la curva de $f(x)=(\ x-1\ )\,e^{-3x}$ en el punto donde $x=0$ es :

a) $y=3x$ b) $y=-4x+1$ c) $y=-3x-4$ d) $y=4x-1$

UNIDAD 2
LA INTEGRAL COMO ANTIDERIVADA

DEFINICION .Una función $F(x)$ es una primitiva o Antiderivada de una función $f(x)$, en un intervalo I, si $F'(x) = f(x) \ \forall \text{ x } \in \text{ I}$.Por ejemplo:

1) Si $f\left(x\right)=1$ entonces una primitiva de ella será $F(x)=x$, ya que $F'(x)=1=f(x)$, pero también $F(x)=x+3$ es primitiva de $f(x)$, en general $F(x)=x+c$ donde *c* es una constante será una primitiva de $f(x)=1$.

2) Si $f(x)=x$ entonces $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$ es una primitiva de $f(x)=x$ ya que $F'(x)=x$.

3) Si $f(x)=x^2$ entonces $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+c$ ya que $F'(x)=x^2=f(x)$.

4) Si $f(x)=x^n$ entonces $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$ para $n\neq -1$.

5) Si $f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$ entonces $F\left(x\right)=\ln x$ para $x>0$.

6)*Si* $f\left(x\right)=senx$ entonces $F\left(x\right)=-\cos x+c$

7)Si $f(x)=\cos x$ entonces $F(x)=sen\ x+c$

8)Si $f(x)=tg\ x$ entonces $F\left(x\right)=\ln\sec x+c$ ¿Porqué?

9) Si $f(x)=\sec^2 x$ entonces $F(x)=tgx+c$

10)Si $f(x)=\csc^2 x$ entonces $F(x)=-ctgx+c$

11)Si $f\left(x\right)=ctgx$ entonces $F\left(x\right)=\ln senx+c.$

12)Si $f(x)=\sec x$ entonces $F\left(x\right)=\ln(\sec x+tagx)+c$ ¿Porqué?

13)Si $f(x)=\csc x$ entonces $F(x)=\ln(\csc x-ctgx)+c$ ¿Porqué?

14)Si $f\left(x\right)=\sec x\ tgx$ entonces $F(x)=\sec x+c$

15)Si $f(x)=\csc x\ ctgx$ entonces $F(x)=-\csc x+c$

DEFINICION

Así, al proceso de encontrar todas las primitivas o antiderivadas de una función f, continua, se le llama integración, en términos matemáticos la simbología:

$\int f(x)dx$ llamada Integral indefinida de la función f, y que se lee la integral de f diferencial de x nos plantea la pregunta de encontrar una función $F(x)$ tal que su derivada (o diferencial) sea $f(x)$ $\left(f(x)dx\right)$ la diferencial de x, dx, nos indica que la integral se hace con respecto a esa variable.

Con esta definición se tiene el siguiente formulario básico para $f_1, f_2, u = f(x)$ funciones diferenciables, *n* un número real:

FORMULARIO BÁSICO DE INTEGRACION Y LINEALIDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Las dos primeras fórmulas dan lugar a lo que se conoce como linealidad de la integral indefinida.

$$1)\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

$$2)\int \left(f_1(x)+f_2(x)\right)\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$3)\int du = u + c \;\; si \;\; u = x \;\; entonces \;\; \int dx = x + c$$

$$4)\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \;\; n \neq -1 \;\; si \;\; u = x \;\; entonces \;\; \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$5)\int \frac{du}{u} = \int u^{-1} du = \ln u + c \;\; si \;\; u = x \;\; entonces \;\; \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$$6)\int e^u du = e^u + c$$

$$7)\int senu \;\, du = -\cos u + c$$

$$8)\int \cos u du = sen \;\, u + c$$

$$9)\int \tan u du = \ln \sec u + c$$

$$10)\int ctgudu = \ln sen \;\, u + c$$

$$11)\int \sec^2 udu = \tan u + c$$

$$12)\int \csc^2 udu = -ctgu + c$$

$$13)\int \sec udu = \ln(\sec u + \tan u) + c$$

$$14)\int \csc udu = \ln(\csc u - ctgu) + c$$

$$15\int \sec u \tan udu = \sec u + c$$

$$16)\int \csc uctgudu = -\csc u + c$$

EJERCICIO
Calcular las siguientes integrales, usando el formulario básico para integración y los ejemplos resueltos.

$$1)\int 7x^{13}dx = 7\int x^{13}dx = 7\frac{x^{14}}{14}+c = \frac{x^{14}}{2}+c$$

$$2)\int \frac{4}{x^2}dx =$$

$$3)\int \frac{5x^3}{3}dx =$$

$$4)\int \frac{2}{5}\sqrt[7]{x^5}\,dx =$$

$$5)\int 2x^6\sqrt[3]{x}\,dx =$$

$$6)\int \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx = 3\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{5}}} = 3\int x^{-\frac{2}{5}}dx = 3\frac{x^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{2}{5}+1}+c = 3\frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+c = 5x^{\frac{3}{5}}+c$$

$$7)\int \frac{2}{3\sqrt{x}}\,dx =$$

$$8)\int\left(2-3x+6x^2\right)dx = \int 2dx + \int -3xdx + \int 6x^2dx = 2\int dx - 3\int xdx + 6\int x^2dx =$$

$$2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{6x^3}{3}+c = 2x-\frac{3x^2}{2}+2x^3+c$$

$$9)\int(3x-4)dx =$$

$$10)\int x(2x-5)^2\,dx =$$

$$11)\int \sqrt{7x}dx = \int\sqrt{7}\sqrt{x}dx = \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{7}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c = \frac{\sqrt{7}x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2x\sqrt{7x}}{3}+c$$

$$12)\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{xx^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)dx =$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}\,dx + \int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}-2}dx + \int x^{\frac{1}{2}-2}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c$$

$$13)\int x\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx =$$

$$14)\int\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{2\sqrt[3]{x}}\right)dx =$$

$$15)\int \frac{x^5-2x^3+3x}{3x^2}dx=\int \frac{x^5}{3x^2}dx-\int \frac{2x^3}{3x^2}dx+\int \frac{3x}{3x^2}dx=\frac{1}{3}\int \frac{x^5}{x^2}dx-\frac{2}{3}\int \frac{x^3}{x^2}dx+\int \frac{3x}{3x^2}dx=$$
$$\frac{1}{3}\int x^3dx-\frac{2}{3}\int xdx+\int \frac{dx}{x}=\frac{1}{3}\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}+\ln x+c=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{3}+\ln x+c.$$

$$16)\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\int \left(x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int x^2dx+2\int dx+\int \frac{1}{x^2}dx=\frac{x^3}{3}+2x+c_1+\int x^{-2}dx=$$
$$\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}+c.$$

$$17)\int \sqrt{x}\left(x+1\right)\left(x-3\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x-3\right)dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx-2\int x^{\frac{3}{2}}dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$
$$\frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}-2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}-\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5}-2x^{\frac{3}{2}}+c$$

Práctica lo anterior con los siguientes ejercicios:

$$i)\int \frac{x^3-5x+2}{x^5}dx$$

$$ii)\int \left(2-\frac{2}{3x}\right)\left(3+x\right)\ dx=$$

CAMBIO DE VARIABLE

Abordaremos el uso de las fórmulas siguientes, también conocido en la literatura matemática como cambio de variable:

$$18)\int \left(x^3+3x-3\right)^{12}\left(3x^2+3\right)dx=$$

sea $u=x^3+3x-3\ \Rightarrow du=\left(3x^2+3\right)dx$ con esto la integral por calcular

quedaría como $\int \left(x^3+3x-3\right)^{12}\left(3x^2+3\right)dx=\int u^{12}du=\frac{u^{13}}{13}+c=\frac{\left(x^3+3x-3\right)^{13}}{13}+c$

$$19)\int (x-6)^{16}dx=$$

$$20)\int \left(17x-4\right)^3dx=$$

$$21)\int \left(3-\frac{x^5}{10}\right)^6x^4dx=$$

$$22)\ \int \frac{\left(\sqrt[3]{x}-7\right)^3}{x^{\frac{2}{3}}}dx=$$

$$23)\int \frac{7x^2+14x}{\sqrt{x^3+3x^2+1}}dx=$$

$$24)\int \sqrt[3]{x^4+x+1}\left(8x^3+2\right)dx=$$

25) $\int \frac{\left(3x^2-x\right)dx}{\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)^4}=$

26) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}=$

27) $\int \frac{2senx\cos x}{\sqrt{1+sen^2x}}\ dx=$

28) $\int \frac{-4x^{-5}}{\left(1+x^{-4}\right)^{13}}\ dx=$

29) $\int \left(3x-9\right)^{11}dx=$

Sea $u=3x-9$ entonces $du=3dx$ por lo tanto $\frac{du}{3}=dx$ con esto la integral por calcular queda como $\int \left(3x-9\right)^{11}dx=\int u^{11}\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^{11}du=\frac{1}{3}\frac{u^{12}}{12}+c=\frac{\left(3x-9\right)^{12}}{36}+c$

30) $\int \frac{\left(x^2+3\right)}{(x^3+9x-7)^2}dx=$

31) $\int \frac{8x^2+16}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}\ dx=\int \frac{8(x^2+2)}{(x^3+6x+1)^{\frac{1}{3}}}dx=8\int \frac{(x^2+2)}{(x^3+6x+1)^{\frac{1}{3}}}dx=$

considerando $u=x^3+6x+1\Rightarrow du=(3x^2+6)dx=3(x^2+2)dx$

entonces $\frac{du}{3}=(x^2+2)dx$ con lo que la integral queda como:

$$8\int \frac{(x^2+2)\ dx}{(x^3+6x+1)^{\frac{1}{3}}}=8\int \frac{\frac{du}{3}}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{8}{3}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}}=\frac{8}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}du=\frac{8}{3}\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c=$$

$$4u^{\frac{2}{3}}+c=4\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2}+c$$

32) $\int \frac{x}{(x^2+3)^{17}}dx=$

33) $\int (2x+5)\sqrt[4]{x^2+5x+1}\ dx=$

$$34)\int \frac{3}{9x^2-12x+4}\,dx = 3\int \frac{dx}{(3x-2)^2} = 3\int (3x-2)^{-2}\,dx =$$

tómese $u = 3x-2 \;\Rightarrow du = 3dx \;\Rightarrow \frac{du}{3} = dx$ con esto la integral

queda como $3\int (3x-2)^{-2}dx = 3\int u^{-2}\frac{du}{3} = \frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{3x-2} + c$

$$35)\int sen^5 5x \cos 5x dx =$$

$$36)\int tg^5 2x \sec^2 2x dx =$$

$$37)\int \frac{\ln^6 x}{x} dx =$$

$$38)\int \frac{x}{2x^2-3}\,dx =$$

tomando $u = 2x^2-3 \;\Rightarrow du = 4xdx \Rightarrow \frac{du}{4} = xdx$ con esto la integral queda:

$$\frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln(2x^2-3) + c$$

$$39)\int \frac{dx}{1-3x} =$$

Tomando $u = 1-3x$ se tiene que $du = -3dx$ de donde $-\frac{du}{3} = dx$ sustituyendo esto en la

integral tenemos $\int \frac{-\frac{du}{3}}{u} = -\frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\ln u + c = -\frac{1}{3}\ln(1-3x) + c$

$$40)\int \frac{dx}{x-4} =$$

$$41)\int \frac{7x}{x^2-7} dx =$$

$$42)\int \frac{15x^4+6x}{x^5+x^2+7} dx$$

$$43)\int \frac{e^x-3}{e^x-3x} dx =$$

$$44)\int \left(\frac{\sec 3x}{3+tg 3x}\right)^2 dx =$$

$$45)\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{5}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\left(x^{\frac{4}{5}}+1\right)} = \int \frac{x^{-\frac{1}{5}}dx}{\left(x^{\frac{4}{5}}+1\right)}$$

Considera $u = x^{\frac{4}{5}} + 1$ su diferencial es $du = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} dx$ con lo que $\frac{5}{4} du = x^{-\frac{1}{5}} dx$

Regresando a la integral por resolver se tiene que:

$$\int \frac{dx}{x + x^{\frac{1}{5}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}\left(x^{\frac{4}{5}} + 1\right)} = \int \frac{x^{-\frac{1}{5}} dx}{x^{\frac{4}{5}} + 1} = \int \frac{\frac{5}{4} du}{u} = \frac{5}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{5}{4} \ln u + c = \frac{5}{4} \ln\left(x^{\frac{4}{5}} + 1\right) + c$$

$46) \int e^{\frac{3x}{4}} dx =$

tomando $u = \frac{3x}{4} \Rightarrow du = \frac{3}{4} dx \Rightarrow \frac{du}{\frac{3}{4}} = dx \Rightarrow \frac{4du}{3} = dx$

así la integral quedaría $\int e^{\frac{3x}{4}} dx = \int e^{u} \frac{4}{3} du = \frac{4}{3} \int e^{u} du = \frac{4}{3} e^{u} + c = \frac{4}{3} e^{\frac{3x}{4}} + c$

$47) \int x e^{-3x^2 - 5} dx$

$48) \int e^{3x + 3} \, dx =$

$49) \int \frac{e^{\frac{x+1}{x}} dx}{x^2} =$

$50) \int \frac{4x}{e^{1-2x^2}} dx =$

$51) \int \frac{dx}{e^{-2x} + 1} =$

$52) \int sen(3x - 1) dx =$

sea $u = 3x - 1 \;\; du = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$ entonces la integral se expresa en términos de u

como $\int senu \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int senudu = -\frac{1}{3} \cos(3x - 1) + c.$

$53) \int sen(x^2) 5x dx =$

$54) \int sen\left(3 - \frac{7x}{5}\right) dx =$

$55) \int \cos(3 - 7x) dx =$

$56) \int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx =$

$57) \int \left(sen(x) + \cos(x)\right)^2 dx =$

$$58)\int \frac{tg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}} =$$

tomando como $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

la integral en términos de u queda como :

$$\int \frac{tg\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}} = \int tgu(2du) = 2\int tgudu = 2\ln\sec u + c = 2\ln\sec\sqrt{x} + c$$

$$59)\int \frac{(3-tgx)^3}{\cos^2 x}dx =$$

$$60)\int \frac{\sec\frac{1}{x}tg\frac{1}{x}}{x^2}dx =$$

$$61)\int \sec 7x\; tg7xdx =$$

$$62)\int ctg^4xdx = \int ctg^2xctg^2xdx = \int ctg^2x\left(\csc^2 x - 1\right)dx = \int ctg^2x\csc^2 xdx - \int ctg^2xdx =$$

$$\int u^2(-du) - \int\left(\csc^2 x - 1\right)dx = -\frac{u^3}{3} - \int\csc^2xdx + \int dx = -\frac{ctg^3x}{3} + ctgx + x + c$$

$$63)\int \frac{\sec x\; tgx}{1+\sec x}dx =$$

$$64)\int \frac{dx}{tg7x} =$$

$$65)\int \csc^2 4xdx =$$

INTEGRACION POR PARTES

Los siguientes ejercicios pondrán en práctica el método de integración por partes basado en la utilización de la siguiente fórmula, para *u, v* dos funciones diferenciables:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

66) $\int 3xe^{2x}dx =$

Tomando $u = 3x \Rightarrow du = 3dx$ y si $dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx$

$si\ \ w = 2x \Rightarrow dw = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dw}{2}$ con esto $v = \int e^{2x}dx = \int e^{w}\frac{dw}{2}$

$\frac{1}{2}\int e^{w}dw = \frac{1}{2}e^{w} = \frac{1}{2}e^{2x}\ \ \therefore v = \frac{1}{2}e^{2x}$(es muy práctico usar $c = 0$,ya que facilita los cálculos).

De acuerdo a la fórmula de integración por partes con las funciones obtenidas se tiene:

$$\int 3xe^{2x}dx = 3x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x}(3dx) = \frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3}{2}\int e^{2x}dx = \frac{3xe^{2x}}{2} - \frac{3}{4}e^{2x} + c$$

67) $\int \frac{e^{-2x}}{x^{-1}}dx =$

68) $\int 4x\cos x dx =$

69) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx =$

70) $\int -xctgx\csc x dx =$

71) $\int \ln x dx =$

72) $\int x\left(\frac{x}{2}+1\right)^3 dx =$

73) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx =$

Si tuviste dificultad para resolver los dos ejercicios anteriores puede ser que te ayude ver la solución del siguiente:

74) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x-3}}dx =$

Si $u = x+1 \Rightarrow du = dx$ tomando $dv = (x-3)^{-\frac{1}{3}}dx \Rightarrow v = \int (x-3)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2}$

Usando la fórmula de integración por partes tenemos:

$$\int (x+1)(x-3)^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3(x+1)(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\int (x-3)^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3(x+1)(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\frac{3}{5}(x-3)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$\frac{3(x+1)(x-3)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{9}{10}(x-3)^{\frac{5}{3}} + c$$

$75)\int 5x^3\ln 3x\ dx=$

Considerando $u=\ln 3x \Rightarrow du=\frac{1}{3x}(3)dx=\frac{dx}{x}$ y como $dv=5x^3dx$

$\Rightarrow v=\int 5x^3dx=5\frac{x^4}{4}$ con esto la integral de acuerdo a la fórmula de integración por partes quedaría como:

$$\int 5x^3\ln 3xdx=\frac{5x^4\ln 3x}{4}-\int\frac{5x^4}{4}\frac{dx}{x}=\frac{5x^4\ln 3x}{4}-\frac{5}{4}\int x^3dx=\frac{5x^4\ln 3x}{4}-\frac{5}{4}\frac{x^4}{4}+c=$$
$$\frac{5x^4\ln 3x}{4}-\frac{5x^4}{16}+c$$

$76)\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=$

$77)\int\cos x\ln(1+\cos x)dx=$

$78)\int senx\ln(\cos x)dx=$

$79)\int e^{senx}\cos x\ senx\ dx=$

$80)\int\ln\sqrt{x+1}dx=\int\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\ln(x+1)dx=$

Tomando $u=\ln(x+1)\Rightarrow du=\frac{dx}{x+1}$ $dv=dx\Rightarrow v=x$

con esto $\frac{1}{2}\int\ln(x+1)\ dx=\frac{x\ln(x+1)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x+1}dx=$

$$\frac{x\ln(x+1)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1-1}{x+1}dx=\frac{x\ln(x+1)}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=$$
$$\frac{x\ln(x+1)}{2}-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\ln(x+1)+c=\frac{x\ln(x+1)}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\ln(x+1)}{2}+c$$

$81)\int 7xsen5xdx$

Tomando $u=7x\Rightarrow du=7dx$ y $dv=sen5xdx\Rightarrow v=\int sen5xdx$ esta integral la resolvemos tomando $w=5x\Rightarrow dw=5dx\Rightarrow\frac{dw}{5}=dx$

con esto se tiene $v=\int sen5xdx=\int senw\frac{dw}{5}=-\frac{1}{5}\cos 5x$

sustituyendo las partes tenemos:

$$\int 7xsen5xdx=-\frac{7x\cos 5x}{5}-\int\left(-\frac{7}{5}\cos 5x\right)dx=-\frac{7x\cos 5x}{5}+\frac{7}{5}\int\cos 5xdx=$$
$$-\frac{7x\cos 5x}{5}+\frac{7sen5x}{25}+c$$

$82) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{x}}}dx =$

$83) \int \frac{xe^{x}}{(x+1)^2}dx =$

$84) \int x^2 \cos 2x dx =$

sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$ tomando $dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \int \cos 2xdx = \frac{sen2x}{2}$ ¿Porqué?

así la integral por resolver queda:

$$\int x^2 \cos 2xdx = \frac{x^2 sen2x}{2} - \int \frac{sen2x}{2} 2xdx = \frac{x^2 sen2x}{2} - \int xsen2xdx$$

La integral $\int xsen2xdx$ también se resuelve por el método de integración por partes:

sea $U = x \Rightarrow dU = dx$ si $dV = sen2xdx \Rightarrow V = \int sen2xdx = -\frac{\cos 2x}{2}$ ¿Porqué? con esto tenemos $\int xsen2xdx = x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = -\frac{x\cos 2x}{2} + \frac{sen2x}{4} + c$ con esto la integral inicial queda: $\int x^2 \cos 2xdx = \frac{x^2 sen2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{sen2x}{4} + c =$

Con esta misma idea resuelve las siguientes integrales:

$85) \int x^2 e^x dx =$

$86) \int \left(x^2 - x\right) e^{-x} dx =$

Finalmente consideraremos la resolución de ejercicios que necesitan más astucia e inventiva.

$87) \int \cos^2 2xdx = \int \cos 2x \cos 2xdx =$

Tomemos $u = \cos 2x \Rightarrow du = -2sen2xdx$ y si $dv = \cos 2xdx \Rightarrow v = \int \cos 2xdx = \frac{sen2x}{2}$

usando lo obtenido en la fórmula para integrar por partes tenemos:

$$\int \cos^2 dx = (cos2x)\frac{sen2x}{2} + \int \frac{sen2x}{2} 2sen2xdx = \frac{\cos 2xsen2x}{2} + \int sen^2 2x =$$

Usando la identidad pitagórica $sen^2 2x + \cos^2 2x = 1$ de donde $sen^2 2x = 1 - \cos^2 2x$

$$= \frac{\cos 2xsen2x}{2} + \int \left(1 - \cos^2 2x\right)dx = \frac{\cos 2xsen2x}{2} + x + c - \int \cos^2 2xdx =$$

Así hemos llegado a la identidad $\int \cos^2 2xdx = \frac{\cos 2xsen2x}{2} + x + c - \int \cos^2 2xdx$ que como podemos observar contiene la integral por resolver en su segundo miembro pasándola al primer miembro tenemos:

$$2\int \cos^2 2xdx = x + \frac{\cos 2xsen2x}{2} + c \Rightarrow \int \cos^2 2xdx = \frac{x}{2} + \frac{\cos 2xsen2x}{4} + C$$

Usa este truco para resolver las siguientes dos integrales:

$88)\int sen^2 xdx =$

$89)\int \sec^3 xdx =$

$90)\int e^x \cos xdx =$

Si $u = \cos x \Rightarrow du = -senxdx,$ si $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

$\Rightarrow \int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x - \int e^x\left(-senx\right)dx = e^x \cos x + \int e^x senxdx =$

Resolvámos $\int e^x senxdx$ por el método de integración por partes:

Sea $U = senx \Rightarrow dU = \cos xdx\ \ y\ \ v = e^x$

$\int e^x senxdx = e^x senx - \int e^x \cos xdx + C$ sustituyendo la solución obtenida tenemos

$\int e^x \cos xdx = e^x \cos x + e^x senx - \int e^x \cos xdx + C =$

Observemos que la integral por resolver está en el segundo miembro
y al trasponerla al primer miembro tenemos que:

$2\int e^x \cos xdx = e^x\left(\cos x + senx\right) + C \Rightarrow \int e^x \cos xdx = \dfrac{e^x}{2}\left(\cos x + senx\right) + c$

Resuelve:

$91)\int e^x senxdx =$

$92)\int sen \ln xdx =$

93)Si $\dfrac{dh}{dt} = 3t^2 + 3\ \ y\ \ h\left(1\right) = 6$ determine $h\left(t\right)$.

Puesto que $\dfrac{dh}{dt} = 3t^2 + 3 \Rightarrow dh = \left(3t^2 + 3\right)dt \Rightarrow \int dh = \int (3t^2 + 3)dt \Rightarrow$

$h\left(t\right) = 3\int t^2 dt + 3\int dt = 3\dfrac{t^3}{3} + c_1 + 3t + c_2 = t^3 + 3t + c$ donde $c = c_1 + c_2$

$\therefore\ \ h\left(t\right) = t^3 + 3t + c$ por la hipótesis del problema si $t = 1\ \ h = 6$.Es decir:

$6 = \left(1\right)^3 + 3\left(1\right) + c \Rightarrow c = 6 - 4 = 2 \Rightarrow h\left(t\right) = t^3 + 3t + 2.$

94)Determine la función f si $f'(x) = 3x^2 - 5 + \dfrac{2}{x}\ \ y\ \ f\left(1\right) = 2.$

95)Determine la función g si $g'(x) = \left(2x - 3\right)^2$ y $g\left(0\right) = -4.$

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

1) Una Antiderivada de $\dfrac{x+1}{x}$ es:

a) $\ln x$ b) $x+\ln(x)+c$ c) $(\ln x)^2+c$ d) $\ln(\ln x)+c$

2) Para $x>0$, $\int \dfrac{\ln x^2}{x}\,dx=$

a) $(\ln x)^2 - x\ln x^x + c$ b) $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2+c$ c) $(\ln x)^2+c$ d) $\ln(\ln x)+c$

3) $\int x^2\, e^{\frac{x}{2}}\,dx=$

a) $x^2\, e^{\frac{x}{2}}+c$ b) $2x^2\, e^{\frac{x}{2}} - 8e^{\frac{x}{2}}+c$ c) $e^{\frac{x}{2}}\left[2x^2-8x+16\right]+c$ d) $2x^2\, e^{\frac{x}{2}}+8e^{\frac{x}{2}}+c$

4) $\int\left(x^5+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=$

a) $x^6+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+c$ b) $\dfrac{x^6}{6}+x^{-\frac{1}{2}}+c$ c) $\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+c$ d). $\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

5) Si $w'(x)=4x^3+3x^2+4x$ y $w(1)=12$, entonces $w(x)$ es:

a) $12x^2+6x+4$ b) $x^4+x^3+2x^2+8$ c) $x^4+3x^3+4x^2+4$ d) $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+4x^2+6$

6) Una partícula se mueve a lo largo de una recta con aceleración dada por $a(t)=3t^2$. En $t=2$, la velocidad de la partícula es 20 y su distancia 34. ¿Cuál es la función distancia?

a) $s(t)=t^4+12t+18$ b) $s(t)=t^3+12$ c) $s(t)=t^3+12t+6$ d). $s(t)=\dfrac{t^4}{4}+12t+6$

7) Una primitiva de $\tan x$ es:
a). $\ln\sec x$ b). $\ln senx$ c). $\sec^2 x$ d). $\tan^2 x$

8) El resultado de $\int\dfrac{x+2}{\sqrt{x}}=$

a). $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+c$ b). $(x+2)^2+c$ c). $\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c$

d). $2x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+c$

9) Una Antiderivada de $\dfrac{x}{x+3}$ es:

a) $\dfrac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}+c$ b) $\ln(x+3)+c$ c) $x-\ln|x+3|+c$ d) $x-3\ln|x+3|+c$

10) $\int x\cos 3x\,dx=$

a) $\frac{x}{3}\, sen\, 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+c$ b) $sen\, 3x+x\cos 3x+c$ c) $\frac{x}{3}\cos 3x+sen\, 3x+c$

d) $x\, sen\, 3x+\cos 3x+c$

11) $\int e^{sen\, x}\cos x\, dx=$

a) $e^{\cos x}+sen\, x+c$ b) $e^{\cos x}+c$ c) $e^{sen\, x}+c$ d) $e^{\cos x} sen\, x+c$

12) $\int\left(\sec^2 x+\sec x\tan x\right)dx=$

a) $\tan x+\csc x+c$ b) $\tan x+\sec x+c$ c) $\frac{\sec^3 x}{3}+\tan^2 x+c$

d) $\ln\left|\sec x+\tan x\right|+c$

13) $\int\frac{x^2dx}{2x^3-4}=$

a) $\frac{x^4}{4}-4x+c$ b) $\ln\left|2x^3-4\right|+c$ c) $\frac{1}{6}\ln\left|2x^3-4\right|+c$ d) $e^{2x^3-4}+c$

14) $\int e^{2x}\cos 3x\, dx=$

a) $\frac{e^{2x}}{13}\left(3\, sen\, 3x+2\cos 3x\right)+c$ b) $\frac{e^{2x}}{13}\left(3\cos 3x+2\, sen\, 3x\right)+c$

c) $2\, e^{2x} sen\, 3x+c$ d) $e^{2x} sen\, 3x+2\, e^{2x}\cos 3x+c$

15) Si tienes $\int\ln x dx$ el método a emplear para su solución es:

a) Cambio de variable b) Integración por partes c) Fracciones Parciales
d) Sustitución trigonométrica

16) $\int x\, sen\, 2x\, dx=$

a) $\frac{x}{2}\cos 2x+c$ b) $\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{sen\, 2x}{4}+c$ c) $-\frac{x}{2}\cos 2x+sen\, 2x+c$

d) $-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{sen\, 2x}{4}+c$

17) $\int\cos^2 y\, dy=$

a) $\frac{sen^3 y}{3}+c$ b) $\frac{sen\, 2y\cos y}{2}+c$ c) $\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}sen\, 2y+c$

d) $y+2\, sen\, 2y+c$

18) $\int x\sqrt{x^2+4}\;dx =$

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3}+c$ b) $\dfrac{1}{3\sqrt{x^2+4}}+c$ c) $\dfrac{\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+c$ d) $\dfrac{1}{3\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}+c}$

19) $\int \dfrac{\cos x}{\sqrt{senx}}\,dx =$

a) $senx+c$ b) $2\sqrt{\cos x}$ c) $2\sqrt{senx}$ d) $2\cos x$

20) Si una primitiva (antiderivada o integral) de la función f es F, entonces.

a) $\int f(x)\,dx = F\left(x\right)+c$ b) $\int f'(x)\,dx = F''(x)+c$ c) $\int f'(x)\,dx = F(x)+c$

d) $\int f'(x)\,dx = F'(x)+c$

UNIDAD 3
LA INTEGRAL DEFINIDA

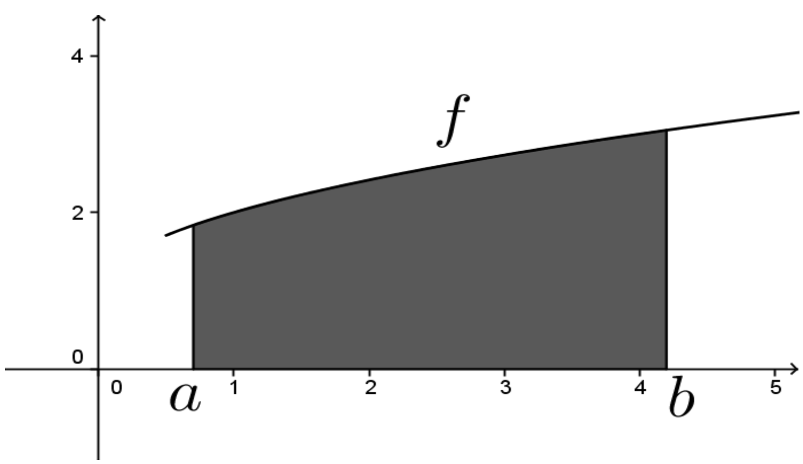
En esta unidad solo consideraremos el siguiente resultado fundamental para la resolución de problemas:

Si una función f es continua en el Intervalo [a, b] y F es una primitiva o Antiderivada de f, entonces la integral definida de la función en el intervalo se calcula por:

$$\int_a^b f(x)dx = F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Donde $\int_a^b f(x)dx$ es conocida como la integral definida de la función f en el intervalo [a, b].

Si la función f es positiva en [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx$ nos permite calcular el área bajo la gráfica de f, el eje X, y las líneas rectas $x=a$ y $x=b$.Como se aprecia en la siguiente figura:



EJERCICIO

Calcular las siguientes integrales definidas:

$1)\int_1^3 (3x+1)dx =$

Usando el resultado enunciado arriba encontremos la primitiva de la funcion f:

$F(x)=\int(3x+1)dx = 3\int xdx + \int dx = 3\frac{x^2}{2}+x+c$ la cual al evaluar en $a=1$ y $b=3$ queda:

$F(1)=3\frac{1}{2}+1+c=\frac{3}{2}+1+c=\frac{5}{2}+c$ y $F(3)=3\frac{3^2}{2}+3+c=\frac{27}{2}+3+c=\frac{33}{2}+c$ lo que nos lleva a :

$\int_1^3(3x+1)dx = F(3)-F(1)=\frac{33}{2}+c-\frac{5}{2}-c=14.$

$2)\int_{-1}^2\left(x^2-7x+5\right)dx=$

$3)\int_0^2\left(3x^2+2x\right)dx=$

$4)\int_1^2(5x-7-x^2)dx=$

$5)\int_0^2\left(x^2+1\right)dx=$

$6)\int_{-1}^1(1-x^2)dx=$

$7)\int_0^4\sqrt{2x+1}dx = 9+c-\frac{1}{3}-c=\frac{26}{3}$ (ver solución).

Primero encontramos $F(x)=\int\sqrt{2x+1}dx$ para esto usamos $u=2x+1 \Rightarrow du=2dx \Rightarrow \frac{du}{2}=dx$

la integral en términos de u queda: $\int \mathrm{u}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du+c=\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}+c=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c$

$\therefore F(x)=\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+c \Rightarrow F(4)=\frac{\sqrt{(2(4)+1)^3}}{3}+c=9+c$ y $\mathrm{F}(0)=\frac{\sqrt{(2(0)+1)^3}}{3}+c=\frac{1}{3}+c$

$\therefore \int_0^4\sqrt{2x+1}dx=F(4)-F(0)=9+c-\frac{1}{3}-c=\frac{26}{3}$

Comprueba los siguientes resultados.

$8)\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=2$

$9)\int_0^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}}dx=\frac{14\sqrt{2}-16}{3}$

$10)\int_4^9\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx=\frac{23}{3}$

$11)\int_0^{\sqrt{5}}\sqrt{9-x^2}\,xdx=\frac{19}{3}$

Calcula:

$$12)\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}dx =$$

$$13)\int_{1}^{2} e^{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$14)\int_{2}^{9} 2\frac{dx}{x} =$$

$$15)\int_{1}^{3} \frac{dx}{5x-3} =$$

Sea $u = 5x\text{ - }3 \Rightarrow du = 5dx \Rightarrow \dfrac{du}{5} = dx$ en términos de u la integral por calcular quedaría $\displaystyle\int \frac{\text{dx}}{\text{5x-3}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln u = \frac{1}{5}\ln\left(5x-3\right)$ con esta primitiva la integral definida por calcular quedaría : $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\text{dx}}{\text{5x-3}} = \frac{1}{5}\ln\left(5(3)-3\right) - \frac{1}{5}\ln\left(5(1)-3\right) = \frac{1}{5}\left[\ln 12 - \ln 2\right] = \frac{1}{5}\ln 6 = \ln\sqrt[5]{6}$

$$16)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x sen x dx = \frac{1}{2} \text{ (ver solución)}$$

Calculamos $F\left(x\right) = \int \cos x sen x dx$ sea $u = \cos x \Rightarrow du = -sen x dx \therefore -du = sen x dx.$

Entonces $F\left(x\right) = \int \cos x sen x dx = -\int u du = -\dfrac{u^2}{2} = -\dfrac{\cos^2 x}{2}$

Finalmente evaluando $F\left(0\right) = -\dfrac{(\cos 0)^2}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{2} = 0$

$$16)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x sen x dx = \frac{1}{2} \text{ (ver solución)}$$

Calculamos $F\left(x\right) = \int \cos x sen x dx$ sea $u = \cos x \Rightarrow du = -sen x dx \therefore -du = sen x dx.$

Entonces $F\left(x\right) = \int \cos x sen x dx = -\int u du = -\dfrac{u^2}{2} = -\dfrac{\cos^2 x}{2}$

Finalmente evaluando $F\left(0\right) = -\dfrac{(\cos 0)^2}{2} = -\dfrac{1}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right)^2}{2} = 0$

$$\therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x sen x dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(0\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Calcula:

$$17)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx =$$

$$18)\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen x}{\cos^2 x}dx =$$

$$19)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{4}dx=$$

$$20)\int_0^1 x^2e^{-x}dx=$$

$$21)\int_2^4 x^3\ln x dx=$$

$$22)\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=$$

$$23)\int_0^2\left(x^2-4\right)^2 xdx=$$

$$24)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xsenxdx=$$

$$25)\int_1^e \ln 5xdx=$$

$$26)\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx=$$

$$27)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{1+tgx}{\cos^4 x}}dx=$$

$$28)\int_2^{e-3}\frac{2}{x+3}dx=$$

$$29)\int_{-2}^{-1}\frac{2x-3}{5+2x}dx=1-4\ln 3 \text{ (ver solución).}$$

$$F(x)=\int\frac{2x-3}{2x+5}dx=\int\frac{2x-3+5-5}{2x+5}dx=\int\frac{2x+5-8}{2x+5}dx=$$

$$\int\frac{2x+5}{2x+5}dx-\int\frac{8}{2x+5}dx=\int dx-8\int\frac{dx}{2x+5}=x-4\ln(2x+5) \text{ ¿Porqué?}$$

Entonces $F(-1)=-1-4\ln\left(2(-1)+5\right)=-1-4\ln(3)$ y $F(-2)=-2-4\ln\left(2(-2)+5\right)=-2$

$$\therefore\int_{-2}^{-1}\frac{2x-3}{2x+5}dx=F(-1)-F(-2)=-1-4\ln(3)-(-2)=2-1-4\ln 3=1-4\ln 3.$$

30)

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\sec^2 xdx=$$

$$b)\int_1^e \ln^2 xdx=F(e)-F(1)=e-2$$

b) Para determinar $F(x)=\int\ln^2 xdx$ usaremos integración por partes sea

$u=\ln^2 x \Rightarrow du = 2\ln x\dfrac{dx}{x}$ tomando $dv = dx \Rightarrow v = x$

con lo que la fórmula de integración por partes queda

$$F(x)=\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - \int x 2\ln x\frac{dx}{x} = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx$$

De tal forma que todavía nos falta por determinar la última integral,la cual también se hace por partes,quedándonos como:

$$F(x)=\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx = x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\right]=$$

$$F(x)=\int \ln^2 x dx = x\ln^2 x - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

Así que $F(x)=x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

De donde $F(e)=e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e = e$

$F(1)=\ln^2 1 - 2\ln 1 + 2 = 2 \;\therefore \int_1^e \ln^2 x dx = F(e)-F(1) = e-2$

Calcula:

c) $\int_1^2 x\ln^2 x dx =$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx =$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

31)Encontrar el área limitada por la curva $y = 2 - x - x^2$ y el eje X.

Primero calcularemos la intersección de la curva con el eje X, para esto observemos que esto ocurre si resolvemos la ecuación

$0 = 2 - x - x^2 = -(x^2 + x - 2) = -(x+2)(x-1)$, lo cual, nos lleva a que los puntos donde la gráfica intersecta al eje X son $(-2,0)$ y $(1,0)$.

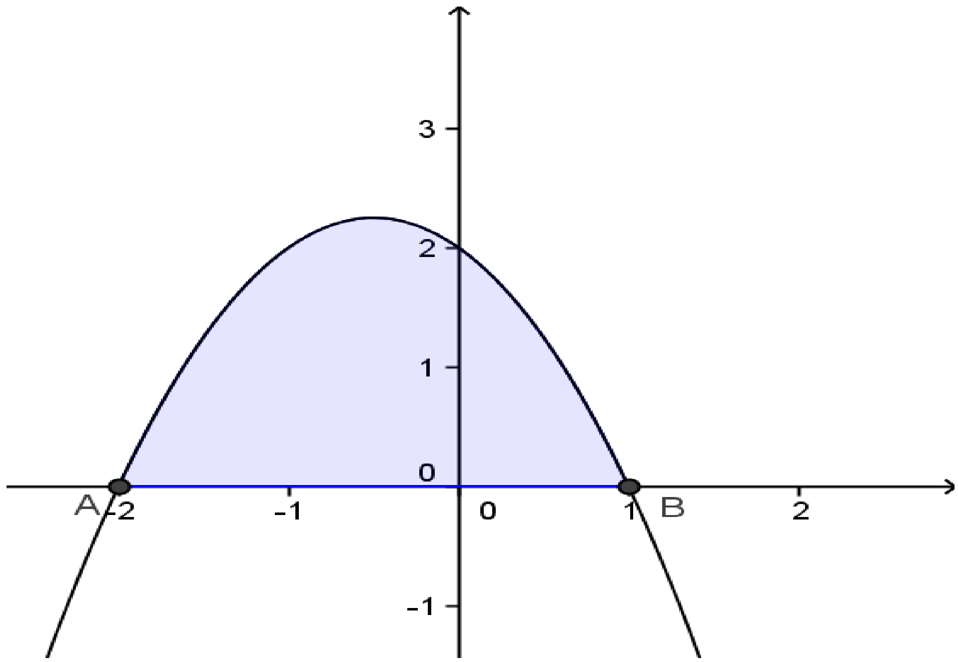
Así el área deseada estará dada por:

$\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx = F(1)-F(-2) = \dfrac{7}{6}-\left(-\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{7}{6}+\dfrac{10}{3} = \dfrac{27}{6} = \dfrac{9}{2}u^2$.Donde

$F(x)=\int (2-x-x^2)dx = 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} \quad \therefore \mathrm{F}(-2) = -4-2+\dfrac{8}{3} = -6+\dfrac{8}{3} = -\dfrac{10}{3}$

$y \; F(1) = 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{12}{6} - \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{7}{6}$

El área sombreada en la figura es el área recién calculada:



32)Encontrar el área limitada por la curva $y = 2x - x^2$ y el eje X.

33)Encontrar el área entre la curva $y = 4 - x^2$ y las rectas $x = 0, y = 0$.

34)Encontrar el área bajo la curva $y = 3x^2 + 4$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

35)Encontrar el área bajo la curva $y = x + 2$,desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

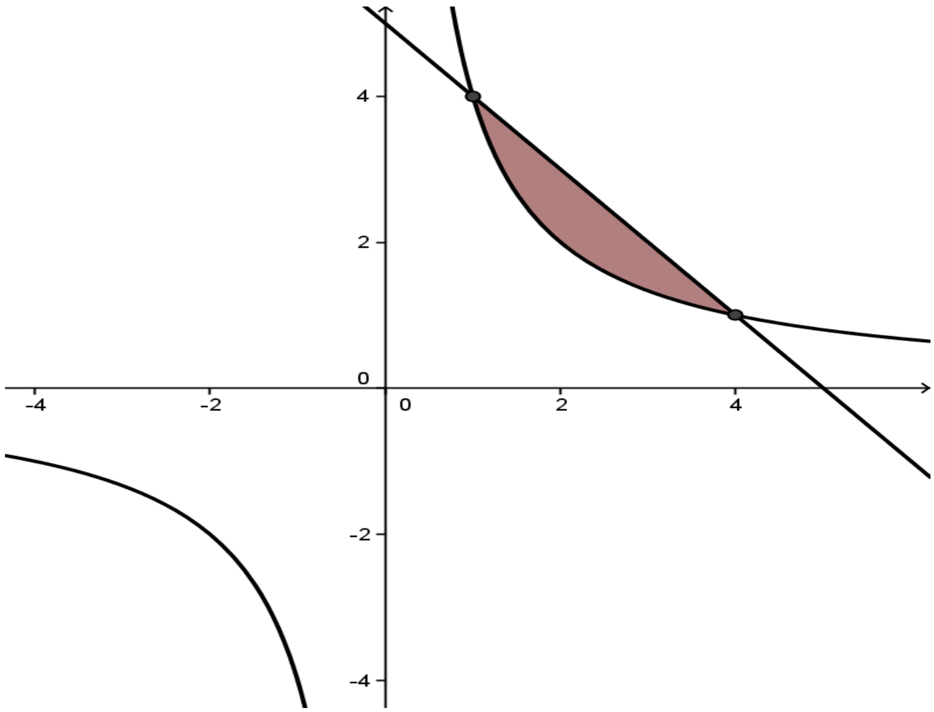
a)Usando solo Geometría elemental.

b)Usando una Integral Definida.

36)Encontrar el área bajo la curva $y = \ln x$ desde $x = 1$ hasta $x = e$.

37)Encontrar el área limitada por la hipérbola $y = \frac{4}{x}$ y la recta $y = 5 - x$.

El área por calcular puede verse en la siguiente figura, la porción sombreada:



Calculemos los puntos de intersección entre las curvas para delimitar el área deseada, esto lo haremos igualando las funciones, para determinar en cuales valores de *x* coinciden las imágenes; más propiamente:

$$y=\frac{4}{x}=5-x\Rightarrow\frac{4}{x}=5-x\Rightarrow 4=5x-x^2\Rightarrow x^2-5x+4=0$$

Resolviendo por el método de factorización tenemos:

$$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow x_1=a=1 \text{ ó } x_2=b=4$$

así el área deseada estará dada por $\int_1^4\left(5-x-\frac{4}{x}\right)dx=5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\Big|_1^4$

$$5(4)-\frac{16}{2}-4\ln 4-(5(1)-\frac{1}{2}-4\ln 1)=20-5-\frac{15}{2}-4\ln 4=\frac{15}{2}-4\ln 4\cong 1.956$$

38)Encontrar el área limitada por la parábola $y=2x-x^2$ y la recta $y=-x$.

39)Encontrar el área limitada por $y=5-x^2$ y la recta $y=x-1$.

40)Calcular el área entre las curvas $y=\frac{x^2}{3}$ e $y=4-\frac{2}{3}x^2$.

41)Hallar el área entre las curvas $y=8x-x^2$ e $y=2x$.

42)Determina el área entre la parábola $y=x^2-2x+2$ y la recta $y=x$.

43)Determina el área entre la parábola $y=(x+1)^2$ y la recta $y=3x+3$.

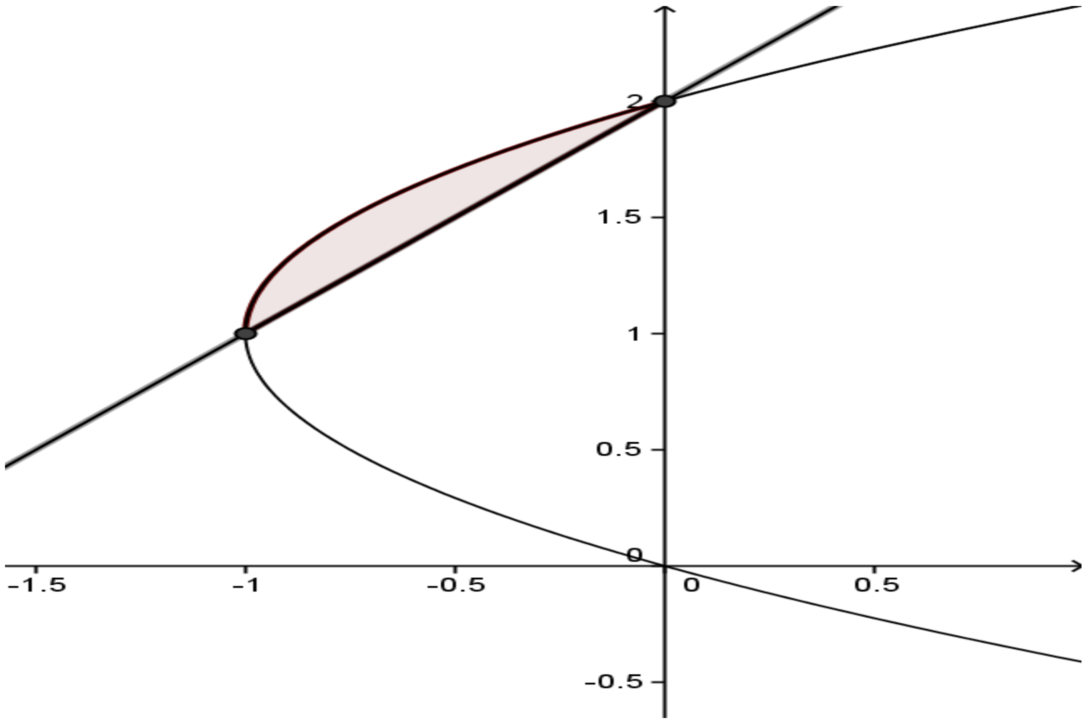
44)Determina el área entre $y=x^2$, $y=2x-x^2$.

45) Determina el área entre $y=x^3, y=x$

46)Calcule el área entre las curvas $x = y^2 - 2y$ y $x + 2 = y$.

Haremos un bosquejo de el área limitada por las curvas,para esto :

$x = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y-1)^2 - 1 \Rightarrow (y-1)^2 = x + 1$ que es una parábola horizontal con V(−1,1),la otra curva es una línea recta.El área por calcular es la sombreada:



Para ver las intersecciones hagamos

$x = y^2 - 2y = y - 2 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow y_1 = 1$ ó $y_2 = 2$.Ya que es más práctico calcular esta área considerando elementos de área horizontales,siguiendo la idea de los verticales.Así tenemos : $\int_1^2 \left(\text{y-2-}(\text{y}^2 - 2y)\right)dy = \int_1^2 (-y^2 + 3y - 2)dy =$

$$\left[-\frac{y^3}{3} + 3\frac{y^2}{2} - 2y\right]_1^2 = -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 4 - \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

47)Calcular el área entre las curvas $x = y^2 + 5y + 1$; $x = 2y + 1$.

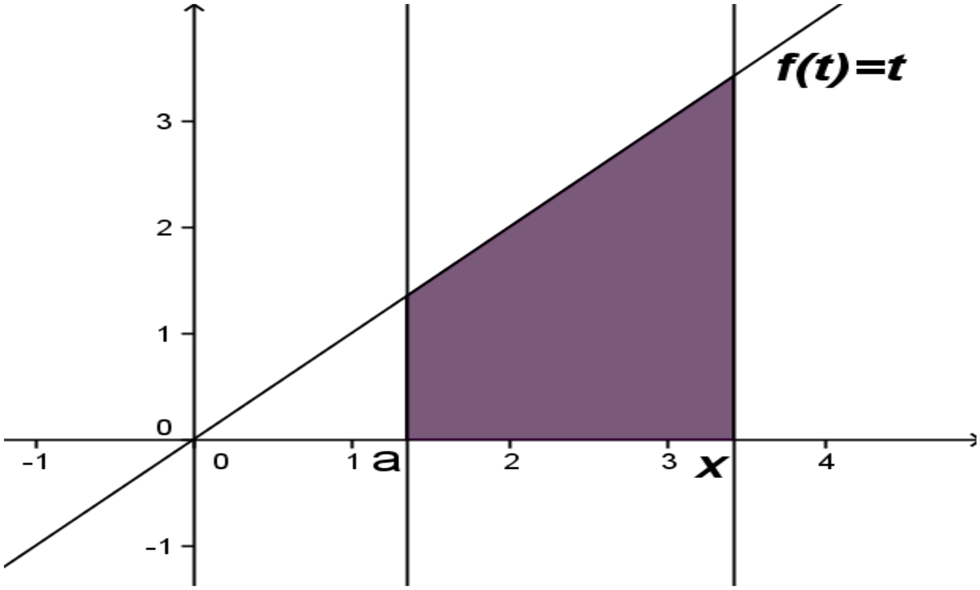
48)Determina el área entre las curvas $x = y^2 + 6y + 1$; $x = -2y - 6$.

49)Determina el área entre las curvas $y = 4 - x^2$ y las rectas $x = -1$; $x = 1$.

50)Calcula el área entre las curvas $y = 4 \text{ - } x^2$ e $y = x + 2$.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN

1. $A(x)=\int_a^x t dt$, la función área, mostrada en la figura es:



a) x b) x^2 c) $\dfrac{x^2-a^2}{2}$ d) x^2-a^2

2. El área comprendida entre el eje x y la función $f(x)=x^3+1$ en el intervalo $[\,0, 2\,]$ es:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 18

3. Para calcular el área de una semicircunferencia superior de radio 1 centrada en el origen usas la integral definida:

a) $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$ b) $\int_{-1}^{1}-\sqrt{1-x^2}dx$ c) $\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2-1}dx$ d) $\int_{0}^{1}\sqrt{x^2-1}dx$

4. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \; sen\; x \csc x \; dx =$

a) $\dfrac{\pi}{6}$ b) 1 c) $-\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{12}$

5. ¿Cuántos de los siguientes argumentos son ciertos?

a) $\int_a^b f(k\,x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_p^w g(x)\,dx = -\int_w^p g(x)\,dx$

c) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

d) $\int_c^c u(x)\,dx = 0$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

6. $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\, dx =$

a) 25 b) 16 c) $\ln\left(\frac{25}{9}\right)$ d) $\ln 4$

7. Encuentre el área de la región acotada por la gráfica de $y = x^2, x = 5, x = 2 \text{ y } y = 0$

a) 27 b) 39 c) $42\frac{1}{3}$ d) 45

8. $\int_4^{25} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx =$

a) $2e^2(e^3 - 1)$ b) $e^5 - e^2$ c) $\frac{1}{2}\left(e^5 - e^2\right)$ d) $e^4\left(e^{21} - 1\right)$

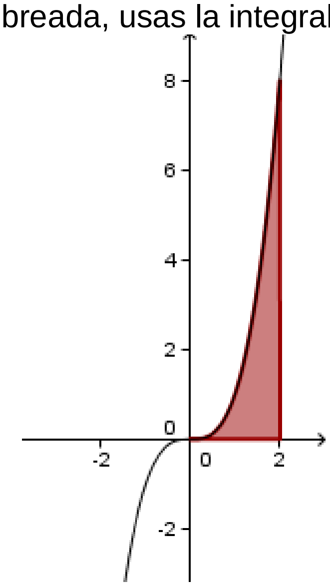
9. $\int_6^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-6}} =$

a) 8 b) La integral diverge c) 5 d) 4

10. $\int_0^1 \left(2x^3 + x\right)\left(e^{x^4 + x^2}\right) dx =$

a) $\frac{e^4 - e^2}{2}$ b) $\frac{e^2 - 1}{2}$ c) $e^2 - e$ d) $e^4 - e^2$

11. Para calcular el área sombreada, usas la integral definida:



a) $\int_0^2 x^2 dx$ b) $\int_{-1}^2 x^3 dx$ c) $\int_0^2 x^3 dx$ d) $\int_2^0 x^3$

12. $\int_0^2 |x - 1|\, dx =$

a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$

13. $\int_1^2 \frac{3x^2-2}{x^3}\,dx =$

a) $\ln 2 - 1$ b) $\ln 8 - \frac{3}{4}$ c) $3\ln 2$ d) $-\frac{1}{4}$

14. El área limitada por las curvas , $y = 1$, $y = e^{-\frac{x}{2}}$ y $x = 1$ es:

a) $\frac{2-\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$ b) $2e^{\frac{1}{2}} - 2$ c) $1 - \frac{1}{e}$ d) $2\,e^{\frac{1}{2}} - 3$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\; sen\; x \sec x\; dx =$

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 2

16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\; sen\; x\; dx =$

a) $1 - e$ b) e c) $\frac{e^2-1}{2}$ d) $e - 1$

17.¿Cuál es el área de la región en el plano xy encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = 3x$, $y = 1$ y $y = 2$?

a) $-\frac{7}{6} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ b) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}$ c) $-\frac{7}{6} + 2\sqrt{2}$ d) $\frac{13}{6}$

18. Para calcular el área entre las gráficas de $y = 9 - x^2$ y $y = x + 3$, usas la integral definida:

a) $\int_{-3}^{2} (9 - x^2)dx$ b) $\int_{-3}^{2} \left[(x+3) - (9 - x^2)\right]dx$ c) $\int_{-3}^{2} \left[(9 - x^2) - (x+3)\right]dx$

d) $\int_{-3}^{2} (x+3)dx$

19. $\int_1^{e^2} \ln y\; dy =$

a) $1 - e^2$ b) $e^2 - 1$ c) $e^2 + 1$ d) $e^4 - e^2 + 1$

20. $\int_1^2 x\, e^{3x^2}\, dx =$

a) $\frac{1}{3}\left(e^8 - e\right)$ b) $\frac{1}{6}\left(e^{12} - e^3\right)$ c) $2e^{12} - e^3$ d) $\frac{1}{3}\left(e^{12} - e^3\right)$

21. ¿Cuál es el área de la región en el plano xy limitada por las gráficas de $y^2 = 3 - x$ y $y = x - 1$?

a) $\frac{7}{6}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{9}{2}$

22. ¿Cuál es el área entre las gráficas $y = x - 2$ y $x = y^2$?

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{19}{6}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $\frac{9}{2}$

UNIDAD 4

MODELOS Y PREDICCIÓN

INTRODUCCIÓN

Una de las ramas de la matemática que ha encontrado una gran cantidad de aplicaciones son las ECUACIONES DIFERENCIALES.

Una ecuación diferencial es aquella que tiene derivadas de variables dependientes con respecto a variables independientes.

Por ejemplo:

1) $\frac{dy}{dx}=5x$

2) $\frac{dy}{dx}=ky$ donde k es una constante

3) $y''+y'=3$

4) $5x\frac{dy}{dx}+y=3x$.

Una SOLUCION de una Ecuación Diferencial es una función y, que depende de x, tal que su equivalente y su derivada sustituida en la ecuación diferencial, produce una identidad.

Por ejemplo, la ecuación diferencial 1) tiene por solución $y=\frac{5}{2}x^2+c$, ya que $\frac{dy}{dx}=5x$.

La ecuación diferencial 2) tiene por solución $y=Ce^{kx}$ donde C,k son constantes, ya que $\frac{dy}{dx}=Ce^{kx}k=kCe^{kx}=ky$ .Solo se tratará el método para encontrar soluciones como las del ejemplo 1) y 2).Las ecuaciones de los ejemplos 3) y 4) se ven en cursos poco más especializados.

Un tipo de ecuación diferencial es: $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ el cual se resuelve por un método conocido como separación de variables.

Básicamente consiste en tomar la forma diferencial de $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)}$ esta es:

$g(y)dy=f(x)dx$ e integrando a ambos lados se tiene la solución a la ecuación diferencial propuesta. Algunos ejemplos pueden ayudar a aclarar estas ideas.

EJEMPLO

Resolver usando el método de separación de variables:

1)$4xydx+\left(x^2+1\right)dy=0$

Dividiendo ambos lados de la ecuación entre $y\left(x^2+1\right)$ tendríamos:

$\frac{4xydx}{(x^2+1)y}+\frac{(x^2+1)dy}{(x^2+1)y}=0$ Lo cual queda como:

$\frac{4xdx}{x^2+1}=-\frac{dy}{y}$ Que integrando a ambos lados se tiene $\int\frac{4xdx}{x^2+1}=-\int\frac{dy}{y}$

Y que al resolver queda:

$2\int\frac{2xdx}{x^2+1}=-\ln y+c_2$ Tomando $u=x^2+1\Rightarrow du=2xdx$ así, tenemos que

$2\int\frac{2xdx}{x^2+1}=2\int\frac{du}{u}=2\ln u+c_1=2\ln(x^2+1)+c_1=-\ln y+c_2$

$\Rightarrow c_2-c_1=\ln y+\ln(x^2+1)^2=\ln y(x^2+1)^2=c_3 \Rightarrow (x^2+1)^2y=e^{c_3}=c\Rightarrow c=y(x^2+1)^2$

Que también se expresa como $y=\frac{c}{(x^2+1)^2}$.

2) $\frac{dy}{dx}=e^{x+y+3}$

Observemos primero que la ecuación diferencial puede escribirse como:

$\frac{dy}{dx}=e^{x+y+3}=e^{x+3}e^y$, la cual al multiplicarla por $\frac{1}{e^y}$ queda como $\frac{dy}{e^ydx}=\frac{e^{x+3}e^y}{e^y}$.

Que al simplificar y expresar en forma diferencial queda como: $\frac{dy}{e^y}=e^{x+3}dx$ al integrar ambos lados se tiene $\int\frac{dy}{e^y}=\int e^{x+3}dx\Rightarrow\int e^{-y}dy=\int e^{x+3}dx$ que son integrales fáciles de resolver quedando esto como:

$-e^{-y}+c=e^{x+3}\Rightarrow c=e^{x+3}+e^{-y}=e^{x+3}+\frac{1}{e^y}=\frac{e^{x+3}e^y+1}{e^y}=\frac{e^{x+y+3}+1}{e^y}$ siendo esta una solución implícita de la ecuación diferencial.

3) $(xy+2x+y+2)dx+(x^2+2x)dy=0$ Factorizando *x* en el primer paréntesis tenemos:

$(x(y+2)+y+2)dx+(x^2+2x)dy=0$ Si ahora factorizamos $y+2$ en el primer paréntesis este queda como $(y+2)(x+1)$ y la ecuación queda como:

$(y+2)(x+1)dx+(x^2+2x)dy=0$

Al multiplicar ambos lados por $\frac{1}{(y+2)(x^2+2x)}$ tenemos:

$\frac{(y+2)(x+1)dx}{(y+2)(x^2+2x)}+\frac{(x^2+2x)dy}{(y+2)(x^2+2x)}=0$

Lo cual es equivalente a: $\frac{(x+1)dx}{x^2+2x}=-\frac{dy}{y+2}$

Integrando a ambos lados la ecuación tenemos:

$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x} = -\int \frac{dy}{y+2}$ Las integrales resultantes pueden ser resueltas por el método de cambio de variable de la siguiente forma tomando $u = x^2 + 2x$ se tiene que

$du = (2x+2)dx = 2(x+1)dx$; de igual forma si $w = y+2 \Rightarrow dw = dy$ con esto las integrales pasan a:

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dw}{w}$ Que al usar fórmulas fundamentales de integración queda como:

$\frac{1}{2}\ln(x^2+2x) = -\ln(y+2)+c$ Al usar propiedades fundamentales de logaritmos esto puede expresarse como $\ln(x^2+2x)^{\frac{1}{2}} + \ln(y+2) = \ln(y+2)\sqrt{x^2+2x} = c$ lo cual implica que:

$(y+2)\sqrt{x^2+2x} = e^c = k$ lo cual permite expresar la solución de la ecuación diferencial como: $y = \frac{k}{\sqrt{x^2+2x}} - 2.$

4) $e^{-y}(1+\frac{dy}{dx}) = 1$

Multiplicamos por e^y ambos lados de la ecuación quedando esta como:

$1+\frac{dy}{dx} = e^y$ Sumando -1 ambos lados de la ecuación tenemos $\frac{dy}{dx} = e^y - 1$ tomando diferenciales e integrando queda como: $\int \frac{dy}{e^y-1} = \int dx$ la primera integral tiene un artificio para su solución, así que la haremos por separado para su mayor comprensión.

Multiplicamos por 1=$\frac{e^{-y}}{e^{-y}}$ el integrando, el cual no se altera ya que $1a = a1$ $\forall$ a número real.

$$\int \frac{dy}{e^y-1} = \int \frac{e^{-y}}{e^{-y}(e^y-1)}dy = \int \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}dy$$

Utilizando cambio de variable para resolver esta integral; sea $u = 1-e^{-y}$ entonces la diferencial es: $du = -e^{-y}(-1)dy = e^{-y}dy$ usando este cambio de variable la integral queda expresada como:

$$\int \frac{du}{u} = \ln(1-e^{-y}) + C_2.$$

Volviendo a la ecuación diferencial: $\int \frac{dy}{e^y - 1} = \int \frac{e^{-y}}{1-e^{-y}} dy = \ln(1-e^{-y}) = \int dx = x + c_1.$

Finalmente la solución puede ser expresada como: $\ln\left(1-e^{-y}\right) = x + c_1 \quad \Rightarrow$ $1-e^{-y} = e^{x+c_1} = e^x e^{c_1}$ (por propiedades de funciones inversas, en este caso de exponenciales y logarítmicas). Lo cual es lo mismo que $1-e^{-y} = Ce^x$ donde $\mathrm{C} = e^{c_1}$.

Lo cual nos da:

$1 - Ce^x = e^{-y} = \frac{1}{e^y} \Rightarrow \quad e^y = \frac{1}{1-Ce^x}$ Tomando logaritmos en base *e* se tiene que $y = \ln \frac{1}{1-Ce^x}$.

5) $\quad ydy = \frac{x\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ reagrupando términos queda $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

integrando

$\int \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ Las cuales pueden ser resueltas usando el cambio de variable

$u = 1 + y^2 \Rightarrow du = 2ydy$ (lo mismo para la integral que depende de *x*) entonces las integrales se convierten en:

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\sqrt{w}}$ Que al resolverlas, por ejemplo la primera, queda como:

$$\frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_1 = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_1 = \frac{1}{2}2u^{\frac{1}{2}} + c_1 = u^{\frac{1}{2}} + c_1 = \sqrt{1+y^2} + c_1.$$

Así la ecuación diferencial tiene como solución: $\sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+x^2} = c$ (*)

<u>Ejercicio</u>. Escribe *y* en términos de *x* en la solución (*).

EJERCICIO

Resuelve usando el método de separación de variables las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{dy}{dx} = y^2$
2. $\frac{dy}{dx} = 5y$
3. $\frac{dy}{dx} = \left(x+1\right)^2$
4. $e^y y' = \frac{3x^2}{1+y}$

5. $y\dfrac{dy}{dx}=x$

6. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}$

7. $y'=\dfrac{\ln x}{xy+xy^3}$

8. $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{2y+3}{4x+5}\right)^2$

9. $y\ln x\dfrac{dx}{dy}=\left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$

10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y\left(1+x^3\right)}$

11. $\dfrac{dy}{dx}=xy^3\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

12. $xyy'=\left(1-y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

13. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-e^{-x}}{y+e^y}$

14. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{y+x^2y}$

15. $\dfrac{dy}{dx}=e^{y+2x}$

16. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+senx}{3y^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$

18. $\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$

19. $x^2y'+y=0$

20. $\left(1+y^2\right)dx+xydy=0$

21. $xdx+ye^{-x}dy=0$

22. $y'+y^2senx=0$

23. $e^{-y}y'+\cos x=0$

24. $x(\sqrt{1+y^2})+y\dfrac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2}=0$

25. $\dfrac{dy}{dx}=1+x-y-xy$

26. $yy'=1+x+y^2+xy^2$

27. $xdx+2y\sqrt{x^2+1}dy=0$

28. $\frac{dy}{dx}=1-x+y^2-xy^2$

29. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x-y}}{e^{x+y}}$

30. $y'=y+1$

31. Determina la función *f* sí $f'(x)=x^2-2x-4$ y $f(3)=-6$.

32. Determina la función *h* si $h''(x)=4(1+3x)^2$ además $\text{h}'\left(\frac{2}{3}\right)=13, h(0)=\frac{55}{27}$.

33. Encuentra la función *f* talque $f'(x)=x^3 f(x)$ y $f(0)=1$.

34. Obtener la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,1)$ y cuya pendiente en (x,y) es $\frac{y^2}{x^3}$.

35. Obtenga la ecuación de la curva que satisface $\frac{dy}{dx}=4x^3y$ y cuya intersección en el *eje y* es 7.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Supóngase que en este momento se cuenta con una población (de gente, bacterias u otra especie viviente) o con una cierta cantidad de una sustancia que con el tiempo tendiera a crecer, en el caso de la población (o disminuir en el caso de la sustancia) proporcionalmente de acuerdo a la cantidad existente en este supuesto consideramos que la tasa de mortalidad, nacimientos, no sufren abruptos muy grandes (guerras, epidemias, etc.).

Al igual que los nacimientos producen pequeñas variaciones a la cantidad existente en este momento; *y* representa tal cantidad y la rapidez de variación con respecto al tiempo se supone directamente proporcional a la cantidad existente, esto en lenguaje matemático tiene como representación $\frac{dy}{dt}=ky$.

Ecuación diferencial que puede resolverse por el método de separación de variables, con el cual procedemos a su solución.

Escribiendo en su forma diferencial se tiene $dy=kydt$ y dividiendo ambos lados entre *y* se tiene $\frac{dy}{y}=kdt$ lo cual al integrar queda $\int\frac{dy}{y}=\int kdt$ que resulta fácilmente resoluble por fórmulas fundamentales de integración quedando $\ln y+c_1=kt+c_2$ que podemos escribir como $\ln y=kt+c_3$ lo cual implica que $y=e^{kt+c_3}=ce^{kt}$ donde $c=e^{c_3}$.

Así la solución $y(t)=ce^{kt}$ permite predecir la cantidad de población (sustancia) para periodos de tiempo no muy grandes, debido al carácter estrictamente creciente de la función exponencial, también permite predecir, crecimiento si *k* es positiva y decrecimiento si *k* es negativa, esto último en el caso de disminución de sustancias radioactivas, por ejemplo.

También si $t=0$, el momento en que se empieza a contar la población, tenemos en la solución de la ecuación diferencial $y(0)=ce^{k(0)}=c$ así *c* es la cantidad inicial de población o sustancia por considerar, llamaremos $y(0)=y_0$.

La solución $y(t)=ce^{kt}$ es conocida como la ecuación de crecimiento exponencial si *k>0* y decrecimiento si *k<0, k* es llamada la tasa de crecimiento relativa.

EJERCICIO.

Resolver los problemas 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13,14 Y 15 USANDO COMO GUIA LOS RESUELTOS.

1) Una población de bacterias crece a una razón proporcional a su magnitud. Al principio es de 10 mil y después de 10 días es de 24 mil ¿Cuántas habrá después de 25 días?

Los datos proporcionados sobre el crecimiento de la población, permiten usar $y(t)=ce^{kt}$ así con los datos extraídos del problema tenemos:

$y(0)=y_0=10$ Mil y en $t=10$ días hay 24 mil, con esto sustituimos $y(10)=24000=10000e^{10k}$ despejando *k,* tenemos $e^{10k}=\frac{24}{10}$ lo cual implica que $10k=\ln\frac{24}{10}$ y que $k=\frac{\ln\frac{24}{10}}{10}\approx$ *0.0875*.

Con estos datos tenemos que después de 25 días habrá $y(25)=10,000e^{0.0875(25)}=89,234$ bacterias.

2) ¿Cuánto tardará la población de bacterias en duplicarse (llegar a ser 20 mil)?

3) La población de una ciudad era de 4 millones en 1836 y de 180 millones en 2006.Se supone que el crecimiento de esa población es proporcional a la población existente. ¿Después de cuánto tiempo se triplicó la población existente en 1836?

Primeramente observemos que de 1836 a 2006 han transcurrido 170 años entonces $y(170)=180$ millones y $y_0=4$ millones con lo cual se tiene $180=4e^{170k}$ de donde despejando *k* tenemos $e^{170k}=\frac{180}{4}$, tomando logaritmos de base *e* tenemos que: $170k=\ln\frac{180}{4}$ y finalmente $k=\frac{\ln\frac{180}{4}}{170}\approx 0.02239$.

Para responder cuanto tiempo pasó para que $y_0 = 4 \text{ millones}$ llegue a 12 millones (el triple) hacemos $12 = 4e^{0.02239t}$. Nuevamente despejando el exponente tenemos:

$t = \dfrac{\ln \frac{12}{4}}{0.02239} \approx 49$ Años.

4) ¿Cuál será la población de la misma ciudad del ejercicio anterior en el año 2018?

5) La población de cierto país crece al 3.2% anual. Suponiendo que ahora es de 4.5 millones ¿cuál será la población al cabo de trece años?
Puesto que $t = 13$, $k = 0.032$, $y_0 = 4.5$ millones. Entonces $y(13) = 4{,}500{,}000e^{(0.032)(13)} =$ 6, 821,486 habitantes.

6) ¿Cuál será la población al término de 10 años? ¿Y de 15 años?

7) Todos los seres vivos contienen Carbono 12 que es estable, y Carbono 14, que es radioactivo. Mientras esté vivo un animal o planta la razón entre las dos variedades de Carbono permanecen sin cambio dado que el Carbono 14 se renueva constantemente después de su muerte, no se absorbe más Carbono 14.La vida media del Carbono 14 es de 5570 años (el tiempo que tarda en desgastarse a la mitad la cantidad inicial de carbono).
Si un pedazo de madera de una tumba antigua contiene 65% de Carbono 14 ¿Cuánto hace que se construyó esta tumba?
Un dato es que la vida media del Carbono 14 es de 5570 años como ya lo habíamos señalado tarda 5570 años en pasar de y_0 a la mitad, $\frac{y_0}{2}$, con esto podemos calcular la constante en este caso de decrecimiento como se podrá comprobar en el siguiente cálculo:

$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{5570k}$ que al despejar *k* nos queda $\dfrac{\frac{y_0}{2}}{y_0} = \dfrac{y_0}{2y_0} = \dfrac{1}{2} = e^{5570k}$ lo cual implica que 5570k= $\ln\frac{1}{2}$ y que $k = \dfrac{\ln(1/2)}{5570} \approx -0.00012$.

Ahora si la cantidad de Carbono 14 después de un tiempo t es $0.65y_0$ de la cantidad inicial y_0 .Con esto podemos calcular el tiempo en que se construyó la tumba de la siguiente manera:

$0.65y_0 = y_0 e^{-0.00012t}$ despejando t primero dividimos entre y_o quedando

$0.65 = e^{-0.00012t}$ $\quad \therefore\ t = \dfrac{\ln 0.65}{-0.00012} \approx 3462 \text{ años}$.

8) Una sustancia radioactiva tiene una vida media de 810 años si hay 10 grs. Inicialmente ¿Cuánto queda al cabo de 300 años?

9) LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Esta ley nos dice que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre la temperatura del objeto y la de su entorno, siempre que dicha diferencia no sea muy grande.

Sea *y* la temperatura del objeto, su rapidez de enfriamiento con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de la temperatura del objeto con su entorno, y_0.

Traducido a lenguaje matemático esto es: $\frac{dy}{dt}=k\left(y-y_o\right)$

Obtendremos la solución para calcular la temperatura después de un tiempo *t* usando el método de separación de variables, tratado al principio de la unidad.

$\frac{dy}{dt}=k(y-y_0)$ Usando la forma diferencial y reacomodando es $\frac{dy}{y-y_0}=kdt$

integrando

$\int\frac{dy}{y-y_0}=\int kdt$ Usando $u=y-y_o\Rightarrow du=dy$ haciendo un cambio de variable

obtenemos: $\ln\left(y-y_o\right)+c_1=kt+c_2$ de donde $\ln\left(y-y_o\right)=kt+c_3$ (donde $c_3=c_2-c_1$)

$\Rightarrow y-y_0=e^{kt+c_3}=ce^{kt}\Rightarrow y=ce^{kt}+y_0$ .Ejemplifiquemos la ley de enfriamiento de Newton.

Ejemplo

Se saca del horno un objeto a 300 ^{0} F y se deja enfriar en un cuarto a 75 ^{0} F, si la temperatura decae a 200 ^{0} F en media hora ¿Cual será en 3 horas?

Con los datos dados $y=300$, $y_0=75$, $t=0$. Por lo tanto $300=ce^{k(o)}+75=c+75$ de donde $c=225$.

Ahora si $t=0.5$. Se tiene $y=200=225e^{0.5k}+75$ despejando *k* tenemos: k= $\frac{\ln\frac{125}{225}}{0.5}\approx-1.1755$ .Finalmente si $t=3$ *horas* la temperatura del cuerpo es:

$y=225e^{3(-1.1755)}+75\ \approx 82^0 F$.

10) Un termómetro registraba -20 ^{0} C en el exterior y fue introducido después a una casa donde la temperatura era de 24 ^{0} C. Después de 5 minutos, registraba 0^0 C ¿En que tiempo registrará 20 ^{0} C?

11) Poco después de tomar una aspirina, un paciente absorbió 300 mgs. De ella si la cantidad de aspirina en el torrente sanguíneo es proporcional a la cantidad inicial consumida y cada 2 horas se elimina la mitad, calcule el tiempo que tarda en disminuir la aspirina en la sangre hasta 100mgs.

Dado que la ecuación $\frac{dy}{dt}=ky$ es aplicable debido a las condiciones del problema su solución nos dará la del mismo.

S i $y\left(0\right)=300=y_0$. Y $t=2$ lleva a que $y\left(2\right)=150$ entonces $150=300e^{2k}$ despejando *k*:

k=$\frac{\ln\frac{1}{2}}{2} \approx -0.3465$.Finalmente ¿Cuál es el tiempo *t* en qué $y(t)=100$?

$100 = 300e^{-0.3465t}$ despejando t = $\frac{\ln\frac{1}{3}}{-0.3465} \approx 3.2$ horas.

12) Después de tomar un medicamento líquido la concentración del medicamento en la sangre es de 0.2 mg/dl si esa cantidad decae de acuerdo a $y(t)=y_0e^{kt}$ y cada hora se absorbe la cuarta parte ¿Cuánto tardará en que la concentración del medicamento en la sangre sea de 0.08mg/dl?

13) Un anestésico para animales llamado pentobarbital sódico se usa para un perro y se requieren 30 mg por Kg. de peso del perro a tratar. El anestésico se elimina de acuerdo a $y(t)=y_0e^{kt}$. En 4 horas la cantidad suministrada disminuye a la mitad. Calcula la cantidad a suministrar para anestesiar a un perro de 20 Kg. durante 45 minutos.

14) Se estimaba que la población mundial era 1600 millones en 1960, y 5300 millones en 1990.Haga una predicción para el 2005 y compare su resultado con lo establecido por los diferentes censos mundiales.

15) Si la tasa de robos de automóviles se triplica cada 6 meses. Calcula el tiempo en que se duplica.

CUESTIONARIO DE EVALUACIÓN.

1. La solución para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=x$, es:

a) $\frac{x}{2}+c$ b) x^2+c c) $x^{\frac{1}{2}}+c$ d) $\frac{x^2}{2}+c$

2. La solución para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, es:

a) $x^2+y^2=c$ b) $y+\frac{x^2}{2}=c$ c) $y^2=2x^2+c$ d) $y^2=2x+c$

3. Si $\frac{dy}{dx}=x^2$ y $y=4$ cuando $x=3$, entonces la solución particular es:

a) $\frac{x^3}{3}-5$ b) $\frac{x^3}{3}+3$ c) x^3-23 d). $x+1$

4. La solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=e^{-y}$ es:

a) $y=e^{-x}+c$ b) $y=\ln|x|+c$ c) $y=\ln|x+c|$

d) $y=-\ln|x|+c$

5. Si $\frac{dy}{dx} = y$, entonces:

a) $x = y^2 + c$ b) $y = x^2 + c$ c) $x - \ln|y| = c$

d) $y = x + \ln|x| + c$ e. $\ln|x| + \ln|y| = c$

6. Sea f diferenciable dos veces en el intervalo (a, b). Si g es una antiderivada de f'' en el intervalo (a, b), entonces $g'(x)$ debe ser igual a:

a) $f(x)$ b) $f'(x)$ c) $f''(x)$

d) $f'(x + c)$, para alguna c no necesariamente cero.

7. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de tal manera que su aceleración en t segundos es $(t+1)^2 \frac{cm}{seg^2}$. La posición de la partícula en $t = 0$ es el origen y su velocidad inicial es $1 \frac{cm}{seg}$. ¿Cuál es la posición de la partícula, en centímetros en el tiempo t *segundos*.

a) $\frac{(t+1)^4}{12} + \frac{2}{3}t - \frac{1}{12}$ b) $\frac{(t+1)^4}{12} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{12}$ c) $\frac{(t+1)^4 + 2t - 1}{3}$

d) $\frac{(t+1)^4 + 2t + 1}{3}$

8. La solución particular de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 28x^3y^2$, $y = 7$ cuando $x = 8$ es:

a) $y = \frac{7}{50 + 49x^4}$ b) $y = -\frac{7}{50 + 49x^4}$ c) $y = \frac{7}{50 - 49x^3}$ d) $y = \frac{7}{50 - 49x^4}$

9. Si la población crece proporcionalmente, con respecto al tiempo, de acuerdo a la cantidad existente la ecuación diferencial que representa el enunciado es:

a) $\frac{dP}{dt} = kt$ b) $\frac{dP}{P} = k$ c) $\frac{dP}{dt} = kP$ d) $\frac{dP}{P} = kt$

10. Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial dada que satisface la condición indicada. $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{8 - x}$, $y = 4$ cuando $x = 8$

a) $y = \frac{12}{8(8-x)^{\frac{3}{2}} + 3}$ b) $y = \frac{12}{8(8-x)^{\frac{3}{2}} - 3}$

c) $y = \frac{8(8-x)^{\frac{3}{2}} - 3}{12}$ d) $y = \frac{12}{8(8+x)^{\frac{3}{2}} - 3}$

11. Cuando la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera (x, y) es $2x - 3$ y $(3, 2)$ es un punto de la curva, se trata de la función:

a) $2x - 3$ b) $x^3 + 2x$ c) $x^2 - 3x + 2$ d) $x^2 - 2x - 3$

A continuación se presentan exámenes extraordinarios resueltos de periodos pasados es recomendable que primero intentes resolverlos y posteriormente compares.

EXAMEN EXTRAODINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II PERIODO EZ-2004.

SOLUCIÓN

1) Obtenga la derivada de:

$a)\, y = sen^2 2x \cos 3x$

$$y' = sen^2 2x \frac{d}{dx}(\cos 3x) + \cos 3x \frac{d}{dx}(sen^2 2x) = sen^2 2x(-3sen3x) + \cos 3x(4sen2x \cos 2x)$$

$= -3sen^2 2xsen3x + 4sen2x\cos 2x \cos 3x.$

$b)\, y = xe^{x^3-1}$

$$y' = x\left(3x^2 e^{x^3-1}\right) + e^{x^3-1}(1) = e^{x^3-1}\left(3x^3+1\right).$$

$$c)\, y = \sqrt{x^3 - x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(x^3 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(3x^2 - 2x\right) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}}.$$

2) Integra por Cambio de Variable.

$$a)\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

considerando $u = \ln x \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$ en términos de u la integral por resolver queda:

$$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + c \therefore \int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{\ln^4 x}{4} + c$$

$$b)\int sen2x \cos 2x dx$$

Sea $u = sen2x \Rightarrow du = 2\cos 2x \Rightarrow \frac{du}{2} = \cos 2xdx \therefore$

$$\int sen2x \cos 2xdx = \int u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + c = \frac{sen^2 2x}{4} + c$$

3) Calcular las siguientes integrales:

$a)\int x^2e^{3x}dx$ Usaremos el método de integración por partes

tomando $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{3x} \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \dfrac{e^{3x}}{3}$

Sustituyendo esto en $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[x\frac{e^{3x}}{3} - \int\frac{e^{3x}}{3}dx\right] =$$

$$\frac{x^2e^{3x}}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$$

$$b)\int \cos^3 xdx = \int \cos x\cos^2 xdx = \int \cos x\left(1 - sen^2x\right)dx = \int \cos xdx - \int sen^2x\cos xdx =$$

$$= senx - \frac{sen^3x}{3} + c.$$

c)Hallar el área entre lás gráficas de $y = 9 - x^2$ e $y = x - 3$.

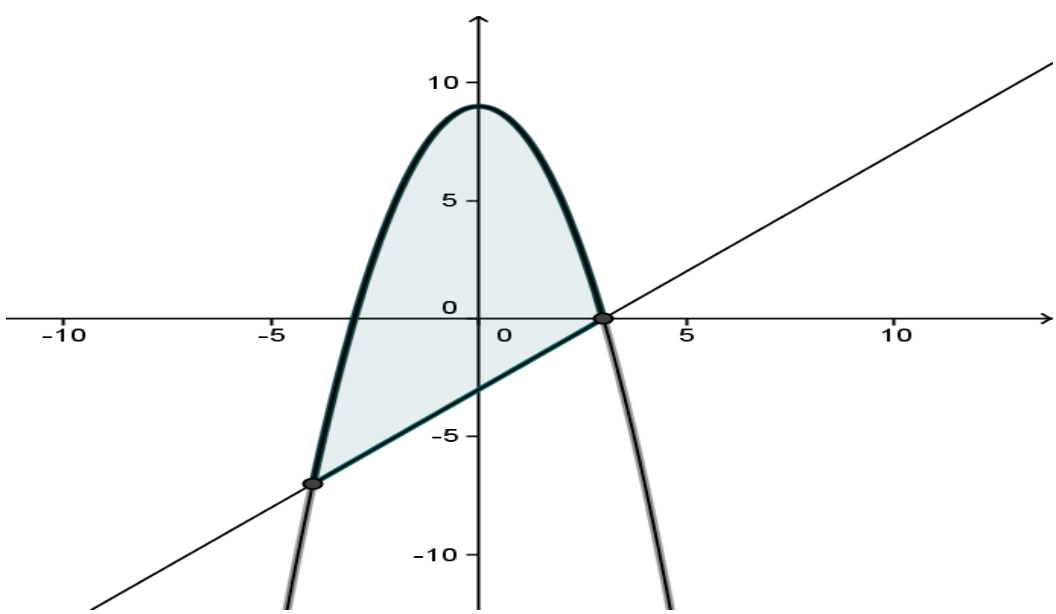
Calculemos las intersecciones como:

$$9 - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ó } x = -4$$

Así el área está dada por $\int_{-4}^{3}\left(9 - x^2 - (x-3)\right)dx = \int_{-4}^{3}(12 - x^2 - x)dx =$

$$\left[12x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{3} = 36 - 9 - \frac{9}{2} - \left(-48 + \frac{64}{3} - 8\right) = 27 - \frac{9}{2} + 56 - \frac{64}{3} = \frac{343}{6}$$

El área calculada está sombreada en la siguiente gráfica:



EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

PERIODO EZ-2005

<u>SOLUCIÓN</u>

1) Deriva:

$a)\, y=\ln^4\left(2x^3-7\right)-e^{-3x^3} \Rightarrow$

$y'=4\ln^3\left(2x^3-7\right)\frac{d}{dx}\left(\ln\left(2x^3-7\right)\right)-e^{-3x^3}\left(-9x^2\right)=4\ln^3\left(2x^3-7\right)\frac{1}{2x^3-7}\left(6x^2\right)+e^{-3x^3}\left(9x^2\right)=$

$\frac{24x^2\ln^3\left(2x^3-7\right)}{2x^3-7}+e^{-3x^3}\left(9x^2\right).$

$b)\, y=\sqrt{\cos^3\left(2x-1\right)}=\cos^{\frac{3}{2}}\left(2x-1\right)\therefore$

$y'=\frac{3}{2}\cos^{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)\frac{d}{dx}\left(\cos\left(2x-1\right)\right)=\frac{3}{2}\cos^{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)\left(-2sen\left(2x-1\right)\right)=$

$-3sen\left(2x-1\right)\sqrt{\cos\left(2x-1\right)}.$

$c)\, y=tgx^3+5sen^3x \Rightarrow y'=\sec^2 x^3\left(3x^2\right)+15sen^2x\cos x$

2. Calcula:

$a)\int_{-1}^{2}(x^2-7x+5)dx$

$F\left(x\right)=\int\left(x^2-7x+5\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+5x\therefore F\left(-1\right)=\frac{-1}{3}-\frac{7}{2}-5=-\frac{53}{6}$

$F\left(2\right)=\frac{8}{3}-14+10=-\frac{4}{3}\therefore\int_{-1}^{2}(x^2-7x+5)dx=F\left(2\right)-F\left(-1\right)=-\frac{4}{3}-\left(-\frac{53}{6}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{53}{6}=\frac{45}{6}$

$b)\int x^2\ln xdx$

Esta integral se resuelve con la fórmula de integración por partes:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

sea $u=\ln x\Rightarrow du=\frac{dx}{x}$ si $dv=x^2dx\Rightarrow v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$ con esto tenemos:

$\int x^2\ln xdx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+c$

$c)\int\cos 3x sen^4 3xdx$

Sea $u=sen3x\Rightarrow du=3\cos 3xdx\Rightarrow\frac{du}{3}=\cos 3xdx\ \therefore$

$\int\cos 3xsen^4 3xdx=\int u^4\frac{du}{3}=\frac{u^5}{15}+c=\frac{sen^5 3x}{15}+c$

3) Hallar el área limitada por las curvas :$y = x + 2$ e $y = 4 - x^2$.

Primero calculamos las intersecciones de las curvas:

$4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) \Leftrightarrow x = -2$ $ó$ $x = 1$.

Así el área por calcular está dada por: $\int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)dx =$

$$\left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2 \right) = \frac{9}{2}$$

EXTRAORDINARIO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

PERIODO EA-2008-1

SOLUCIÓN

1.-Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x + \tan x}$

Usando la regla de la cadena tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + \tan x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(x + \tan x) = \frac{1}{2}(x + \tan x)^{-\frac{1}{2}} (1 + \sec^2 x) = \frac{(1 + \sec^2 x)}{2\sqrt{x + \tan x}}$$

b) $f(x) = xe^{x^2}$

Primero usamos la fórmula para derivar productos de funciones y posteriormente las de derivación trascendente:

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{x^2}\right) = x\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) + e^{x^2}\frac{d}{dx}(x) = x\left(2xe^{x^2}\right) + e^{x^2} = e^{x^2}\left(2x^2 + 1\right)$$

c) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$\frac{\left(2e^{-x}\right)\left(2e^x\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

2.-Determina $f(x)$ si $f''(x) = x + \sqrt{x}$ y además $f(1) = 1, f'(x) = 2$.

Recuerda que:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}\right) \Rightarrow \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} = f'(x) = \int\left(x + \sqrt{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c_1$$

Puesto que $f'(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c_1$ y $f'(1) = 2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + c_1 \Rightarrow c_1 = 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{6}$

Esto último nos lleva a que $f'(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{5}{6}$ Finalmente tenemos que:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{5}{6}\Rightarrow\int df(x)=f(x)=\int\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{5}{6}\right)dx=\frac{x^3}{6}+\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{15}+\frac{5}{6}x+c$$

Además como $f(1)=1=\frac{1}{6}+\frac{4}{15}+\frac{5}{6}+c\Rightarrow c=1-\frac{1}{6}-\frac{4}{15}-\frac{5}{6}=-\frac{4}{15}\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{4x^{\frac{5}{2}}}{15}+\frac{5}{6}x-\frac{4}{15}$$

3.-Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x^3\left(1+x^4\right)^5 dx$

Resolvemos por cambio de variable sea $u=1+x^4\Rightarrow du=4x^3dx\Rightarrow\frac{du}{4}=x^3dx$

Con esto tenemos $\int x^3\left(1+x^4\right)^5 dx=\int u^5\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int u^5du=\frac{1}{4}\frac{u^6}{6}+c=\frac{\left(1+x^4\right)^6}{24}+c$

b) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\int x^{-2}\ln xdx$

Resolvemos con la fórmula de integración por partes: $\int udv=uv-\int vdu$

Tomando $u=\ln x$ tenemos que $du=\frac{1}{x}$, ahora considerando

$dv=x^{-2}dx\Rightarrow v=\int x^{-2}dx=-x^{-1}$ Tenemos que la integración por partes está dada como:

$$\int x^{-2}\ln xdx=-x^{-1}\ln x+\int x^{-1}\frac{dx}{x}=-x^{-1}\ln x+\int x^{-2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+c$$

c) $\int sen\left(\ln x\right)dx$

Usaremos integración por partes sea $u=sen(\ln x)$ entonces $du=\cos\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}$ si $dv=dx$ entonces $v=x$, usando la fórmula de integración por partes tenemos que:

$$\int sen(\ln x)dx=xsen(\ln x)-\int x\cos\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}=xsen(\ln x)-\int\cos\left(\ln x\right)dx=$$

Volviendo a integrar por partes $\int\cos\left(\ln x\right)dx$ Con $u=\cos(\ln x)$, $v=x$ tenemos

$$xsen(\ln x)-\left[x\cos(\ln x)+\int xsen\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}\right]=xsen(\ln x)-\left[x\cos(\ln x)+\int sen\left(\ln x\right)dx\right]=$$

$$xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int sen\left(\ln x\right)dx$$

Hemos llegado a que $\int sen(\ln x)dx=xsen(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int sen\left(\ln x\right)dx$

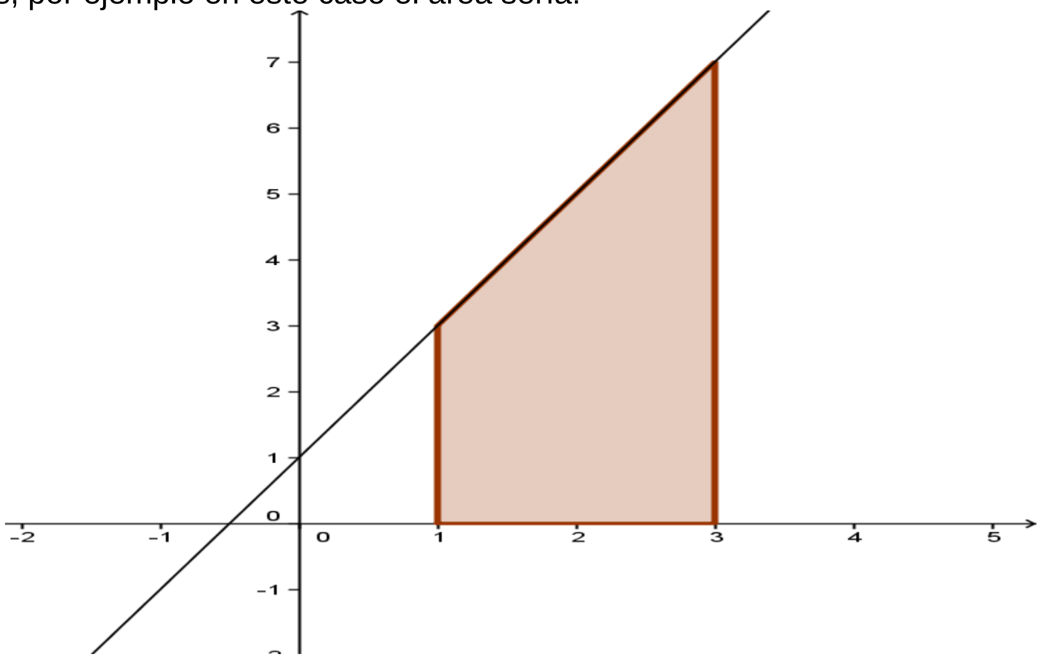
$$\int sen(\ln x)dx = xsen(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int sen(\ln x)\,dx$$

$$\int sen(\ln x)dx + \int sen(\ln x)dx = xsen(\ln x) - x\cos(\ln x) + c_1$$ De donde

$$\int sen(\ln x) = \frac{x}{2}\left(sen(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + c$$

4.-Evalúa e interpreta el cálculo de $\int_1^3 (1+2x)\,dx$

Primero veamos que de acuerdo a la interpretación de cálculo de integrales definidas para funciones positivas se tiene que interpretar como el cálculo de áreas, por ejemplo en este caso el área sería:



En términos del cálculo de áreas elementales no es otra cosa más que la de un trapecio y esta es $\frac{3+7}{2}2 = 10\ u^2$

Con herramienta del cálculo tenemos que calcular la integral definida $\int_1^3 (1+2x)\,dx$

Puesto que $F(x) = \int (1+2x)dx = x + x^2 \quad \Rightarrow F(3) = 3+3^2 = 12$ y $F(1) = 1+1^2 = 2$

Entonces $\int_1^3 (1+2x)\,dx = F(3) - F(1) = 12 - 2 = 10$

5.-Calcula:

a)
$$\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 + 2x - 3\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\Big|_{-1}^{1} =$$

$$\left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2 - 3(1)\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 - 3(-1)\right) = -\frac{20}{3}$$

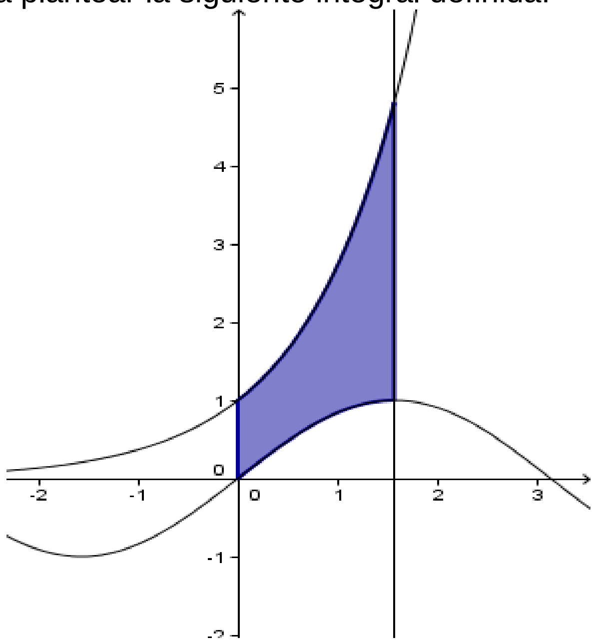
b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (senx + 2\cos x)\, dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (senx + 2\cos x)\, dx = -\cos x + 2senx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left(-\cos\frac{\pi}{2} + 2sen\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4$$

6.- Halle el área limitada por $y = senx, y = e^x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$.

La gráfica nos lleva a plantear la siguiente integral definida:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - senx)dx = e^x + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(e^0 + \cos 0\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$