Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias y Humanidades
Plantel Naucalpan

Matemáticas I

Paquete didáctico para PAE

Coordinador:
H. Laura Paz Santiago

Elaborado por:
Verónica Méndez Nolasco †
Angélica Garcilazo Galnares
Brenda del Carmen Muñoz Ramírez
Ismael Nolasco Martínez

Presentación

Este paquete didáctico ha sido elaborado como parte de un proyecto que tiene como finalidad apoyar al estudiante a construir sus conocimientos y habilidades propias de la asignatura de Matemáticas I y que sirva como guía para el profesorado que imparte cursos de PAE. Los autores hemos puesto nuestro esfuerzo en la elaboración de este material para darte un acompañamiento en la resolución de los ejercicios y esperamos te sea de gran utilidad, así como también lo sea para el profesor.

El presente material está distribuido en 4 unidades que abordan temas fundamentales y los aprendizajes están planteados conforme al programa de estudios vigente.

Cualquier sugerencia o comentario sobre el material es de utilidad para la mejora de éste.

"Lo importante a recordar sobre las matemáticas es no tener miedo"

Richard Dawkins.

Autores:

Angelica Garcilazo Galnares

Brenda del Carmen Muñoz Ramírez

Ismael Nolasco Martínez

Verónica Méndez Nolasco †

Índice

MATEMÁTICAS I

UNIDAD I. El significado de los números y sus operaciones básicas

Propósito:

Al finalizar, el alumno:

Será capaz de operar con los números racionales (enteros y no enteros) y resolver problemas aritméticos aplicando algunas heurísticas para facilitar la comprensión, la búsqueda de un plan de resolución y su ejecución, con la finalidad de que haga suyos los recursos básicos para iniciarse en el uso del lenguaje algebraico para expresar la generalidad.

Contenido temático

- Significado de los números racionales (Q), enteros (Z) y no enteros e irracionales (I).
- Las diversas simbolizaciones de un número racional y sus equivalencias: fracción (parte de un todo), decimal, porcentaje.
- La comparación entre cantidades (relación de orden) empleando las diferentes simbolizaciones.
- Fracciones equivalentes
- Algoritmos de las operaciones entre números enteros y racionales: suma, resta, multiplicación, división, y las condiciones para su ejecución.
- Mínimo común múltiplo (mcm).
- Máximo Común Divisor (MCD).
- Operaciones con potencias: exponentes positivos, negativos y fraccionarios.
- El significado contextual de las operaciones, suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.
- Relación entre partes de una cantidad y la cantidad.
- Relaciones de área.
- Relaciones entre porcentajes: el porcentaje de una cantidad; el porcentaje de un porcentaje y su relación con el total.
- Aplicación de estrategias heurísticas en la resolución aritmética de problemas con más de una operación.

SIGNIFICADO DE LOS NÚMEROS RACIONALES (Q), ENTEROS (Z) Y NO ENTEROS E IRRACIONALES (I)

El concepto de número es considerado como fundamental dentro de las matemáticas, al grado tal, que existe una rama dedicada especialmente a su estudio, es la Aritmética, la cual a su vez es la base del Álgebra. Puede decirse que la idea de número aparece desde que el hombre tiene la necesidad de contar, es decir, relacionar los objetos que le pertenecen con este concepto en su mente, por ello utiliza símbolos diversos para representarlos y así facilitar su manejo y comprensión.

LOS NÚMEROS NATURALES (N)

El hombre en el momento que descubre la agricultura deja de ser nómada y se empieza a establecer en regiones de la tierra por periodos de tiempo largos, ello lo obliga a desarrollar su capacidad de abstracción, es decir a pensar en cómo poder contar. Se dice pues que los números naturales surgen de esa época y cada cultura los representa de muy variadas formas usando símbolos, en la actualidad se utilizan los símbolos que los árabes aportaron, de modo que se pueden escribir de la siguiente manera:

$$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, \dots\}$$

Con estos números se pueden efectuar las operaciones básicas como la suma, resta, producto y división. Las primeras propiedades que los números naturales tienen con respecto a las operaciones son las de cerradura y se cumplen para la suma y el producto, no así para la resta y la división.

Propiedades de cerradura

1. La suma de dos números naturales cualesquiera dan como resultado un número natural.
2. El producto de dos números naturales cualesquiera dan como resultado un número natural.

Otras propiedades de los números naturales son la conmutativa, asociativa y distributiva.

Propiedades conmutativas

1. El orden de los sumandos no altera la suma de números naturales.
2. El orden de los factores no altera el producto de números naturales.

Propiedades asociativas

1. Para sumar tres o más números naturales no importa el orden.
2. Para realizar el producto de tres o más factores no importa el orden.

Propiedad distributiva

1. El producto de un número natural con la suma de dos números naturales es igual a la suma de los productos.

LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)

Al restar dos números naturales el resultado no siempre es un número natural, esto quiere decir que la operación resta no cumple con la propiedad de cerradura, por ello es necesario utilizar nuevos números que complementan a los naturales, para que se satisfaga la propiedad de cerradura en la resta, así como en la suma y el producto, dichos números se conocen como enteros, y son:

$$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Para realizar operaciones con números enteros es necesario recordar las Leyes de los signos, la jerarquía de operaciones y algunas reglas sencillas para la suma y resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Leyes de los signos

Multiplicación	**División**
(+) (+) = +	(+) / (+) = +
(+) (-) = -	(+) / (-) = -
(-) (+) = -	(-) / (+) = -
(-) (-) = +	(-) (-) = +

Jerarquía de operaciones

1. Símbolos de agrupación
2. Potencias y radicales
3. Producto y división
4. Suma y resta

Suma y resta de números enteros

1. Los números enteros del mismo signo se suman y se conserva el signo.
2. Los números enteros de distinto signo se restan y se conserva el signo del mayor.

Potenciación

1. Cualquier número entero positivo o negativo al elevarlo a una potencia par entera, da como resultado un número positivo.
2. Un número entero positivo elevado a una potencia impar entera da como resultado un número positivo.
3. Un número entero negativo elevado a una potencia impar entera, da como resultado un número negativo.

Radicación

1. La raíz par de un número positivo da como resultado un número con doble signo.
2. La raíz par de un número negativo da como resultado un número imaginario con doble signo.
3. La raíz impar de un número positivo da como resultado un número positivo.
4. La raíz impar de un número negativo da como resultado un número negativo.

Ejemplo 1:

Resolver las siguientes operaciones respetando la jerarquía de operaciones y las leyes de los signos.

$(2)^3 + 2(1 - 3) =$

Siguiendo la jerarquía de operaciones, primero se resuelve el signo de agrupación:

$(2)^3 + 2(-2) =$

A continuación, se realiza la potencia:

$8 + 2(-2) =$

Después la multiplicación y, finalmente la resta:

$8 - 4 = 4$

Ejemplo 2:

Resolver las siguientes operaciones respetando la jerarquía de operaciones y las leyes de los signos.

$$\frac{(2+3)(7-9)-(-15+12)^3(4-5)^2}{\left(\sqrt[3]{-64}/_2\right)+(11-13)^2\left(^{30}/_6\right)+(7-8)^3}=$$

Comenzamos con las operaciones que se encuentran en los símbolos de agrupación:

$$\frac{(5)(-2)-(-3)^3(-1)^2}{\left(^{-4}/_2\right)+(-2)^2(5)+(-1)^3}=$$

A continuación, se realizan las potencias:

$$\frac{(5)(-2)-(-27)(1)}{(-2)+(4)(5)+(-1)}=$$

Después se realizan las multiplicaciones:

$$\frac{-10+27}{-2+20-1}=$$

Posteriormente se realizan las sumas y restas y, finalmente la división:

$$\frac{17}{17}=1$$

Serie de ejercicios 1

Resolver las siguientes operaciones respetando la jerarquía de operaciones y las leyes de los signos.

a) $-1+4[2+3(4-2)^2]=$

b) $(2)^3+2[1-2(6-2(1-2)^2)]=$

c) $2[3-2(5-8)^2]=$

d) $\frac{(32-28)+(-4-2)+(5-7)^3}{(3)(-5)+(-2+4)^4}=$

e) $\frac{(5)(5)+(10)(-3)^2}{(-4)(-3)+(7)(-1)^3}=$

LOS NÚMEROS RACIONALES (Q)

Los números enteros no cumplen con la propiedad de cerradura en la operación de la división; es decir, en ocasiones, al dividir un número entero entre otro número entero el resultado no es otro número entero, por ello es necesario ampliar a más números llamados racionales.

Cuando el conjunto de los números enteros se extiende para incluir a todos los cocientes de la forma $^{p}/_{q}$, donde $p \; y \; q \; \in I$, además, $q \; \neq 0$, se obtiene el conjunto de los números racionales.

Las fracciones $^{p}/_{q}$ y $^{kp}/_{kq}$ son fracciones equivalentes, la segunda está en términos mayores y su factor común es k.

Ejemplo 3:

Obtener tres fracciones equivalentes para el número racional proporcionado e indicar el valor de k utilizado:

$$\frac{3}{7} =$$

Supongamos que tomamos como valores de k = 2, 5 y 10, las fracciones equivalentes serán las siguientes:

$$\frac{3}{7} = \frac{2(3)}{2(7)} = \frac{6}{14}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{5(3)}{5(7)} = \frac{15}{35}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{10(3)}{10(7)} = \frac{30}{70}$$

Ejemplo 4:

Completar la siguiente fracción equivalente e indicar el valor de k utilizado.

$$\frac{9}{5} = \frac{\quad}{35}$$

Si observamos los denominadores, podemos notar que el 35 se obtuvo multiplicando a 5 por 7, entonces, de lo anterior deducimos que el valor de k es 7. Así el numerador de la fracción equivalente será 63.

$$\frac{9}{5} = \frac{7(9)}{7(5)} = \frac{63}{35}$$

Máximo común divisor (MCD)

El entero mayor que divide a un conjunto de enteros se denomina su máximo común divisor. Para obtener el MCD se deben buscar los factores comunes al conjunto de números en cuestión, dichos factores comunes deben ser números primos, recordando que los números primos son aquellos que son divisibles entre ellos mismos y la unidad.

Ejemplo 5:

Obtener el MCD de 60, 72 y 84

Podemos observar que los tres números son divisibles entre 2 puesto que terminan en 0 o en número par:

60	72	84	2
30	36	42	

Nuevamente los números encontrados son divisibles entre 2, por la misma razón:

60	72	84	2
30	36	42	2
15	18	21	

Los números obtenidos son divisibles entre 3, puesto que al sumar sus cifras obtenemos un número divisible entre 3.

60	72	84	2
30	36	42	2
15	18	21	3
5	6	7	

Podemos observar que el 5, 6 y 7 ya solo tienen como factor común la unidad, por lo que el MCD resultará de multiplicar los factores comunes a todos los números del conjunto:

MCD = 2 X 2 X 3 = 12

Ejemplo 6:

Obtener el MCD de 528, 792 y 1188

Podemos observar que los tres números son divisibles entre 2 puesto que terminan en número par:

528	792	1188	2
264	396	594	

Nuevamente los números encontrados son divisibles entre 2, por la misma razón:

528	792	1188	2
264	396	594	2
132	198	297	

Los números obtenidos son divisibles entre 3, puesto que al sumar sus cifras obtenemos un número divisible entre 3.

528	792	1188	2
264	396	594	2
132	198	297	3
44	66	99	

Podemos observar que el 44, 66 y 99 tienen como factor el número 11, así obtenemos lo siguiente:

528	792	1188	2
264	396	594	2
132	198	297	3
44	66	99	11
4	6	9	

Finalmente, los números 4, 6 y 9 ya solo tienen como factor común la unidad, por lo que el MCD resultará de multiplicar los factores comunes a todos los números del conjunto:

MCD = 2 X 2 X 3 x 11 = 132

Ejemplo 7:

Andrea tiene un listón de 120 metros y otro de 96 metros. Desea cortarlos de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posible. ¿Cuántos trozos de cuerda obtendrá y de qué longitud?

Los datos del problema son que se tienen dos listones, uno de 120 metros y otro de 96 metros.

Para resolver el problema es importante entender que el máximo común divisor es el mayor número entero que divide a un conjunto de números, así la clave está en comprender que necesitamos el mayor largo posible; es decir, debemos obtener el máximo común divisor de 120 y 96.

120	96	2
60	48	2
30	24	2
15	12	3
5	4	

El MCD es: 2 x 2 x 2 x 3 = 24

Al observar la tabla y el valor del MCD, podemos saber que la longitud de los trozos será de 24 metros y la cantidad de trozos será 5 trozos del primer listón y 4 trozos del segundo listón.

Mínimo común múltiplo (mcm)

El menor entero positivo divisible por cada uno de los miembros de un conjunto de enteros se llama su mínimo común múltiplo. Para obtener el mcm se deben buscar los factores comunes al conjunto de números en cuestión, y los factores particulares de cada número del conjunto, dichos factores, tanto los comunes como los particulares, deben ser números primos, recordando que los números primos son aquellos que son divisibles entre ellos mismos y la unidad.

Ejemplo 8:

Obtener el mcm de 36, 48 y 60

Podemos observar que los tres números son divisibles entre 2 puesto que terminan en 0 o en número par:

36	48	60	2
18	24	30	

Nuevamente los números encontrados son divisibles entre 2, por la misma razón:

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	

Los números obtenidos son divisibles entre 3, puesto que al sumar sus cifras obtenemos un número divisible entre 3.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	3
3	4	5	

Podemos observar que el 3, 4 y 5 ya solo tienen como factor común la unidad, por lo tanto, ahora continuaremos obteniendo los factores particulares, comenzaremos con el 3, como el 4 y el 5 no son divisibles entre 3, únicamente se bajan al siguiente reglón:

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	3
3	4	5	3
1	4	5	

El siguiente factor particular es el 2, y posteriormente el 5, así que obtenemos lo siguiente:

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	3
3	4	5	3
1	4	5	2
1	2	5	2
1	1	5	5
1	1	1	

El mcm resultará de multiplicar los factores comunes y los factores particulares obtenidos de la siguiente manera:

mcm = 2 x 2 x 3 x 3 x 2 x 2 x 5 = 720

Ejemplo 9:

Obtener el mcm de 26, 40 y 70

Podemos observar que los tres números son divisibles entre 2 puesto que terminan en 0 o en número par:

26	40	70	2
13	20	35	

Ahora observamos que el 13, 20 y 35 ya no tienen factores comunes; sin embargo, el 20 y 35 tienen como factor común el 5 ya que terminan en 0 o 5:

26	40	70	2
13	20	35	5
13	4	7	

El 13, 4 y 7 ya solo tiene como factor común la unidad, por lo tanto, continuaremos obteniendo los factores particulares, comenzaremos con el 13, como el 4 y 7 no son divisibles entre 13, únicamente se bajan al siguiente renglón:

26	40	70	2
13	20	35	5
13	4	7	13
1	4	7	

El siguiente factor particular es el 2, y posteriormente el 7, así que obtenemos lo siguiente:

26	40	70	2
13	20	35	5
13	4	7	13
1	4	7	2
1	2	7	2
1	1	7	7
1	1	1	

El mcm resultará de multiplicar los factores comunes y los factores particulares obtenidos de la siguiente manera:

mcm = 2 x 5 x 13 x 2 x 2 x 7 = 3640

Ejemplo 10:

Alan y Pedro comen en la misma taquería, pero Alan asiste cada 20 días y Pedro cada 30 días, si hoy se encontraron ¿después de cuántos días volverán a encontrarse?

Los datos que tenemos es que Alan va a la taquería cada 20 días y Pedro cada 30 días. Necesitamos encontrar el número menor que sea divisible entre 20 y 30; es decir, tenemos que obtener el mínimo común múltiplo.

20	30	2
10	15	5
2	3	2
1	3	3
1	1	

El mcm es: 2 x 5 x 2 x 3 = 60

Por lo tanto, Alan y Pedro volverán a encontrarse en la taquería dentro de 60 días.

Serie de ejercicios 2

1. Obtener fracciones equivalentes para el número racional utilizando el valor de k proporcionado:

a) $\frac{13}{3}$ con k = 3

b) $\frac{2}{9}$ con k = 21

c) $\frac{5}{6}$ con k = 14

2. Obtener el MCD y mcm de los siguientes conjuntos de números enteros:

a) 52, 65, 78 b) 195, 520, 260 c) 112, 126, 168

Solución:

a) MCD= 13 b) MCD=65 c) MCD=14

3. En una banda compuesta por un baterista, un guitarrista, un bajista y un saxofonista, el baterista toca en lapsos de 8 tiempos, el guitarrista en 12 tiempos, el bajista en 6 tiempos y el saxofonista en 16 tiempos. Si todos empiezan al mismo tiempo, ¿en cuántos tiempos sus periodos volverán a iniciar al mismo tiempo?

4. Máximo quiere pintar una casa pequeña. Según sus cálculos, necesitará 12 litros de pintura roja, 24 litros de pintura verde y 16 litros de pintura blanca. Pero quiere comprar botes de pintura que tengan la misma cantidad de litros y que el número de botes sea el menor posible, ¿de cuántos litros debe ser cada bote y cuántos botes de cada color debe comprar Máximo?

5. Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros. Uno tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio, el segundo tarda 8 días y el tercero tarda 10 días. Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

6. Un acuario pequeño se quedó en bancarrota, por lo que otros acuarios van a comprar los peces que tienen. En total, se venderán 48 peces payaso, 60 peses globo, 36 tiburones bebés, 24 pulpos y 72 peces león. Para la venta, se desea que alberguen la mayor cantidad de animales posible. Además, en cada contenedor sólo puede haber peces de una única especie. ¿Cuántos peces debe haber por contenedor y cuántos contenedores se necesitan para cada especie?

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Suma y Resta

Para realizar la suma de números racionales se utiliza el siguiente algoritmo:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$

Multiplicación

Para realizar la multiplicación de números racionales se utiliza el siguiente algoritmo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

Donde $b \neq 0$ y $d \neq 0$

División

Para realizar la división de números racionales se utiliza el siguiente algoritmo:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Donde $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$

Ejemplo 11:

Realizar las siguientes operaciones con números racionales, simplificar el resultado.

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) =$$

Podemos observar que se deben resolver varias operaciones: una multiplicación, una suma y una resta, respetando la jerarquía de operaciones se comienza con los símbolos de agrupación; es decir, primero realizaremos la suma del primer paréntesis y la resta del segundo paréntesis y, posteriormente, la multiplicación.

Recordando el algoritmo de la suma y resta tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{10 + 12}{15}\right)\left(\frac{8 - 5}{10}\right) = \left(\frac{22}{15}\right)\left(\frac{3}{10}\right)$$

Podemos observar que los factores de la multiplicación no pueden simplificarse, a continuación, se realiza la multiplicación, utilizando el algoritmo correspondiente:

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{22}{15}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{66}{150}$$

Finalmente, el resultado obtenido se simplifica:

$$\frac{66}{150} = \frac{33}{75} = \frac{11}{25}$$

Ejemplo 12:

Realizar las siguientes operaciones con números racionales, simplificar el resultado.

$$\frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{7} - 4\right)} =$$

Podemos observar nuevamente que se deben resolver varias operaciones: una multiplicación, una suma, dos restas y una división, respetando la jerarquía de operaciones se comienza con los símbolos de agrupación; es decir, primero realizaremos la suma del primer paréntesis, la resta del segundo paréntesis y la resta del denominador.

Recordando el algoritmo de la suma y resta tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{7}-4\right)}=\frac{\left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{8-5}{10}\right)}{\left(\frac{2-28}{7}\right)}=\frac{(1)\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(-\frac{26}{7}\right)}$$

A continuación, se realiza la multiplicación del numerador utilizando el algoritmo correspondiente:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{(1)\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(-\frac{26}{7}\right)}=\frac{\left(\frac{3}{10}\right)}{\left(-\frac{26}{7}\right)}$$

Finalmente se realiza la división utilizando el algoritmo correspondiente:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{3}{10}\div\left(-\frac{26}{7}\right)=-\frac{(3)(7)}{(10)(26)}=-\frac{21}{260}$$

Los números 21 y 260 no tienen factores comunes por lo que el resultado final es $=-\frac{21}{260}$

Ejemplo 13:

Realizar las siguientes operaciones con números racionales, simplificar el resultado.

$$\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{3}{1+\frac{1}{3}}\right)}}=$$

Comenzaremos realizando las operaciones que se encuentran en el símbolo de agrupación, primero se realizará la suma y posteriormente la división, utilizando los algoritmos correspondientes:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{3}{\frac{3+1}{3}}\right)}}=\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{3}}\right)}}=\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{9}{4}\right)}}$$

A continuación, se realiza la multiplicación:

$$\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{9}{4}\right)}}=\frac{2}{3-\frac{1}{\frac{18}{4}}}$$

Posteriormente se realiza la división con 1 y la resta con 3:

$$\frac{2}{3-\frac{1}{\frac{18}{4}}}=\frac{2}{3-\frac{\frac{1}{1}}{\frac{18}{4}}}=\frac{2}{3-\frac{4}{18}}=\frac{2}{3-\frac{2}{9}}$$

Finalmente se realiza la resta y la división:

$$\frac{2}{3-\frac{2}{9}}=\frac{2}{\frac{27-2}{9}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{25}{9}}=\frac{18}{25}$$

Como el 18 y el 25 no tienen factores comunes, el resultado final es $\frac{18}{25}$.

Serie de ejercicios 3

Realizar las siguientes operaciones con números racionales, simplificar el resultado.

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=$
2. $3+5\left(-\frac{4}{5}\right)=$
3. $\frac{\frac{1}{2}\div\frac{3}{8}}{\frac{3}{5}}=$
4. $\frac{5+\frac{1}{4}}{3-\frac{2}{\frac{1}{3}+\frac{3}{5}}}=$
5. $\frac{\frac{1}{2}+3\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)}=$

6. $\dfrac{2+3\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)}{\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)}=$

7. $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{2}\div\frac{3}{8}}{\frac{3}{5}}}{\dfrac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{7}-4}}=$

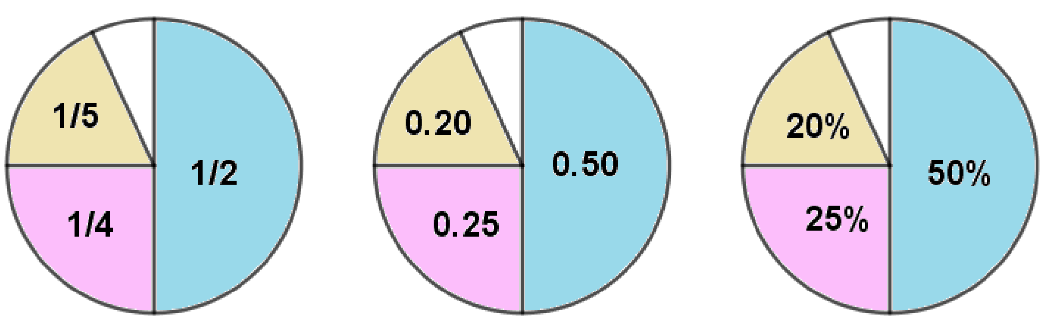
8. $\dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{3}-5\right)}{\dfrac{\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}}=$

9. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}=$

10. $\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{7}}{4\left(1-\frac{2}{5}\right)}=$

SIMBOLIZACIONES DE NÚMEROS RACIONALES

Algunos números con decimales son representaciones de números racionales; incluyendo las representaciones porcentuales, como puede observarse en los siguientes ejemplos:



Los números racionales, además de la notación de cociente, pueden expresarse a través de una cantidad con un número finito de decimales, todos los números con decimales finitos son racionales, o como una sucesión periódica infinita de números.

No todas las cantidades expresadas con decimales son números racionales; ya que existe otro conjunto que no puede expresarse como un cociente de enteros, y sólo pueden representarse a través de una serie aperiódica (sin repeticiones), dichos números son los irracionales, pero se estudiarán más adelante.

Fracciones

Al introducir el concepto de la división, se genera el conjunto de los números racionales, que se definen como el cociente de dos números enteros: $\frac{a}{b}$. Es importante mencionar algunas consideraciones respecto a este cociente:

- El denominador b no puede tomar el valor de cero porque la división quedaría "no definida".
- Los números enteros son parte de los números racionales con b = 1.
- Cuando a = 1 se tienen fracciones que no pueden reducirse a otra fracción.

Los resultados de las divisiones no necesariamente serán números enteros, de ahí la necesidad de establecer nuevas representaciones. Las fracciones son la primera aproximación hacia números racionales, en ellas se representa la división de una cantidad entera (numerador) en partes iguales (denominador). Las fracciones pueden ser propias, impropias o mixtas.

Las fracciones propias son aquellas en las cuales el numerador es menor que el denominador; es decir, cuando el resultado de la división se encuentra entre 0 y 1.

Las fracciones impropias son aquellas en las cuales el numerador es mayor o igual que el denominador; en este caso el resultado de la división es mayor a 1.

Las fracciones mixtas son expresiones matemáticas que representan una fracción impropia como la suma de un entero más la suma de una fracción propia.

Decimales

Otra forma de representar a los números racionales es la decimal, que se obtiene al aplicar la operación de la división. Los números racionales expresados en representación decimal presentan un periodo el cual puede tener el valor de cero o bien otro número.

Porcentajes

Otra representación de los números racionales es una notación similar a la de los números decimales, y es la de los porcentajes. Esta representación nos indica una proporción o razón de cambio respecto a 100 unidades, la cual se obtiene a partir de la notación decimal al multiplicarla por 100 y agregar el símbolo de porcentaje (%) al final del número.

Conversiones entre las distintas simbolizaciones de un número racional

De fracción a representación decimal

Para obtener la representación decimal de un número racional a partir de la representación en fracción simplemente se realiza la división.

Ejemplo 14

Obtener la representación decimal del número $\frac{3}{5}$.

Realizaremos a continuación la división de 3 entre 5:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 0. & 6 & 0 & 0 \\ \cline{2-5}
5 & 3 & 0 & & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 0 \\
 & & & & 0
\end{array}$$

Podemos observar que, si continuamos realizando la división, empiezan a aparecer ceros a la derecha, lo cual indica que el periodo de este número decimal es cero. Por lo tanto, la representación decimal del número $\frac{3}{5}$ es 0.6 o bien $0.6\overline{0}$ para indicar que el periodo es cero.

Ejemplo 15

Obtener la representación decimal del número $\frac{11}{8}$.

Realizaremos la división de 11 entre 8:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & & 1. & 3 & 7 & 5 & 0 & 0 \\ \cline{2-8}
8 & 1 & 1 & & & & & \\
 & & 3 & 0 & & & & \\
 & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & \\
 & & & & & & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

Podemos observar que, si continuamos realizando la división, empiezan a aparecer ceros a la derecha, lo cual indica que el periodo de este número decimal es cero. Por lo tanto, la representación decimal del número $\frac{11}{8}$ es 1.375 o bien $1.375\overline{0}$ para indicar que el periodo es cero.

Ejemplo 16

Obtener la representación decimal del número $\frac{5}{7}$.

Realizaremos la división de 5 entre 7:

	0.	7	1	4	2	8	5	7	1	4
7	5	0								
		1	0							
			3	0						
				2	0					
					6	0				
						4	0			
							5	0		
								1	0	
									3	0
										2

Podemos observar que, si continuamos realizando la división, los valores comienzan a repetirse, puesto que se ha completado el periodo. Por lo tanto, la representación decimal del número $\frac{5}{7}$ es $0.\overline{714285}$.

De representación decimal a porcentual

La representación porcentual se obtiene a partir de la notación decimal al multiplicarla por 100 y agregar el símbolo de porcentaje (%) al final del número.

Ejemplo 17

Obtener la representación porcentual del número $0.55\overline{0}$.

Lo único que debemos hacer es multiplicar el número por 100 y agregar el símbolo de porcentaje, como el periodo es cero, ya no es necesario escribirlo.

$$0.55 \text{ x } 100 = 55\%$$

Ejemplo 18

Obtener la representación porcentual del número $2.\overline{3}$.

Nuevamente multiplicamos por 100 y agregamos el símbolo de porcentaje, pero es importante notar que su periodo es diferente de cero, por lo que deberá mantenerse también en la representación porcentual.

$$2.\overline{3} \text{ x } 100 = 233.\overline{3}\%$$

Ejemplo 19

Obtener la representación porcentual del número $43.7\overline{52}$.

Nuevamente multiplicamos por 100 y agregamos el símbolo de porcentaje, pero es importante notar que su periodo es diferente de cero y que además no ocupa toda la parte decimal, por lo que deberá repetirse en la representación porcentual.

$$43.7\overline{52} \text{ x } 100 = 4375.2\overline{52}\%$$

De representación decimal a fracción

Ejemplo 20

Obtener la fracción del número $32.4\overline{0}$

Podemos observar que el periodo de este número decimal es cero y que la parte decimal está integrada por una sola cifra, por lo tanto, será suficiente multiplicar y dividir por 10, para después simplificar la fracción obtenida.

$$32.4\overline{0} \times \frac{10}{10} = \frac{324}{10} = \frac{162}{5}$$

Ejemplo 21

Obtener la fracción del número $0.015\overline{0}$

Nuevamente, el periodo de este número decimal es cero, pero la parte decimal está integrada por tres cifras, por lo tanto, será necesario multiplicar y dividir por 1000, para después simplificar la fracción obtenida.

$$0.015\overline{0} \times \frac{1000}{1000} = \frac{15}{1000} = \frac{3}{200}$$

Ejemplo 22

Obtener la fracción del número $2.\overline{45}$

Ahora el periodo es diferente de cero y ocupa toda la parte decimal, por lo que será necesario realizar el siguiente procedimiento, se le asigna una literal al número decimal: $a = 2.\overline{45}$.

A continuación, se busca un número conveniente que nos permita recorrer el punto decimal al final del periodo, que en este caso es el número 100, por lo tanto, se obtiene 100a de la siguiente manera:

$$100a = 245.\overline{45}$$

Es importante notar que se conserva el periodo. Para eliminar la parte decimal será necesario realizar la resta 100a – a

$$100a - a = 245.\overline{45} - 2.\overline{45}$$

$$99a = 243$$

Finalmente se despeja a la literal y se simplifica la fracción obtenida.

$$a = \frac{243}{99} = \frac{81}{33} = \frac{27}{11}$$

Ejemplo 23

Obtener la fracción del número $12.3\overline{25}$

Ahora el periodo es diferente de cero y, pero no ocupa toda la parte decimal, por lo que será necesario realizar el siguiente procedimiento, le asignamos una literal: $a = 12.3\overline{25}$.

A continuación, se busca un número conveniente que nos permita recorrer el punto decimal antes del periodo y al final del periodo, que en este caso serían los números 10 y 1000, por lo tanto, se obtiene 10a y 1000a de la siguiente manera:

$$10a = 123.\overline{25}$$

$$1000a = 12325.\overline{25}$$

Es importante notar que se busca que la parte decimal sea igual. Para eliminar la parte decimal será necesario realizar la resta 1000a – 10a

$$1000a - 10a = 12325.\overline{25} - 123.\overline{25}$$

$$990a = 12102$$

Finalmente se despeja a la literal y se simplifica la fracción obtenida.

$$a = \frac{12102}{990} = \frac{6101}{495}$$

Ejemplo 24

Resuelve el siguiente problema: Al adquirir de contado un vehículo cuyo precio es de $250,000.00, se hace un descuento del 7.5%. ¿Cuánto hay que pagar por el vehículo?

Este problema se resuelve fácilmente con una regla de tres, es decir, tomamos el precio del vehículo como el 100% y obtenemos el 7.5% utilizando una regla de tres:

	250,000.00	es a	100%
Como	X	es a	7.5%

Así tenemos que:

$$x = \frac{250{,}000 \times 7.5}{100} = 18{,}750$$

Es decir, el descuento será de $18,750; por lo tanto, para obtener lo que hay que pagar por el vehículo, solo debemos restar al precio original el descuento:

$$250{,}000 - 18{,}750 = 231{,}250$$

Hay que pagar $231,250.00 por el vehículo.

Ejemplo 25

Resolver el siguiente problema: En una encuesta realizada a 500 mujeres, 230 de ellas afirmaron que les gusta usar zapatillas, 125 afirmaron que les gusta usar sandalias y el resto contestó que prefiere usar zapato deportivo. ¿Qué porcentaje de las mujeres encuestadas prefiere el zapato deportivo?

Primero necesitamos saber la cantidad de mujeres que prefieren el zapato deportivo:

$$500 - (230 + 125) = 145$$

Ahora sabemos que 145 mujeres prefieren usar zapato deportivo, ahora utilizando una regla de tres encontramos el porcentaje.

	500 mujeres	Es a	100%
Como	145 mujeres	Es a	x

Así tenemos que:

$$x = \frac{145 \times 100}{500} = 29\%$$

Ahora sabemos que el 29% de las mujeres encuestadas prefieren usar zapato deportivo.

Serie de ejercicios 4

1. Obtener la representación decimal periódica de los siguientes números racionales:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{6}$ c) $\frac{1}{11}$ d) $\frac{8}{5}$

2. Obtener la representación porcentual de los siguientes números decimales:

a) $0.4\overline{0}$ b) $3.75\overline{0}$ c) $2.8\overline{3}$ d) $0.\overline{437}$

3. Obtener la fracción de los siguientes números decimales:

a) $5.25\overline{0}$ b)$0.36\overline{0}$ c) $0.\overline{63}$ d) $1.\overline{4}$ e) $45.1\overline{2}$

4. De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 500. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?
5. María recibe el 12% del dinero de las ventas que realiza. ¿Cuánto tendrá que vender para ganar $10,000?
6. Jorge y Silvia se van a casar, el casino en donde van a realizar su fiesta solo tiene capacidad para 200 personas y ellos piensan en dividir los boletos para invitar a la gente más cercana y decidieron dividirlo de la siguiente manera: 40% a la Familia, 20% compañeros de trabajo, 30% amigos y 10% demás conocidos. ¿Cuántos boletos corresponden a cada porcentaje?
7. En un parque infantil hay 125 bolas. Calcular el porcentaje de bolas de cada color sabiendo que el número de bolsas es: 40 rojas, 10 verdes, 25 naranjas, 20 azules y 30 rosas.
8. Si el número de mujeres de una población ha crecido un 20%, calcular cuántas mujeres hay ahora si antes había 2000.
9. Una piscina olímpica de 2.5 millones de litros de agua está llena al 95% de su capacidad. Se calcula que se evaporará una cantidad de agua correspondiente al 5% de su capacidad total. Calcular cuántos litros se van a evaporar.
10. En una granja hay caballos, vacas, gansos y pollitos. Se sabe que el 44% de los animales tienen cuatro patas y el resto de los animales tienen dos. El número de caballos es el mismo que el de gansos, el número de vacas es 84, y el 40% de los animales son pollitos. Calcular el número total de animales.

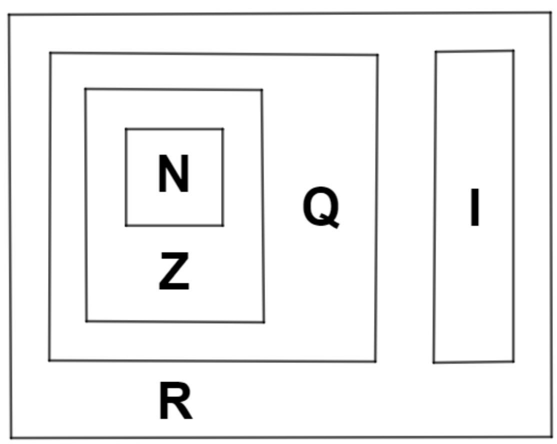
LOS NÚMEROS IRRACIONALES (I)

Existen otro tipo de números distintos a los racionales que no se pueden representar en forma de división de dos números enteros o bien que no tienen periodo en su representación decimal y son conocidos como números irracionales. Los números irracionales son aquellos cuya expansión decimal no es periódica. En general los números irracionales son las raíces cuadradas de números naturales que no da como resultado un número entero. Algunos de esos números son:

$$\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{8}, \ldots$$

LOS NÚMEROS REALES

Es el conjunto más importante de números para el desarrollo de la aritmética, el álgebra, la geometría plana, analítica y el cálculo diferencial e integral. Los números reales se definen como la unión de los números racionales e irracionales y cubren por completo la recta numérica. Los números reales abarcan a todos los números como se ven en el siguiente diagrama:



Leyes de los exponentes

Cuando se tiene un número real cualquiera x, se define como potencia enésima de x como:

$x^n = \underbrace{x.x.x \ldots x}_{n\ veces}$ donde x es la base de la potencia y n es el exponente.

Si x e y representan números reales, entonces se cumplen las siguientes leyes de los exponentes:

1) $x^0 = 1$ con $x \neq 0$
2) $x^n x^m = x^{n+m}$
3) $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

4) $(x^n)^m = x^{n*m}$
5) $(xy)^n = x^n y^m$
6) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ donde $y \neq 0$
7) $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$ donde $y \neq 0$

Ejemplo 26

Utilizando las leyes de los exponentes simplifica cada una de las siguientes operaciones o expresiones algebraicas:

a) $4^0 =$

utilizando la primera ley de los exponentes:

$$x^0 = 1 \qquad \text{con } x \neq 0$$

Tenemos que:

$$4^0 = 1$$

b) $x^3x^4 =$

Utilizando la segunda ley de los exponentes:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

Tenemos que:

$$x^3x^4 = x^{3+4} = x^7$$

c) $(-2xy)^3$

Utilizando la quinta ley de los exponentes:

$$(xy)^n = x^n y^m$$

Tenemos que:

$$(-2xy)^3 = (-2)^3(x)^3(y)^3 = -8x^3y^3$$

d) $\left(\frac{3a^4}{2a^3}\right)^2 =$

Utilizando la sexta ley de los exponentes:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Tenemos que:

$$\left(\frac{3a^4}{2a^3}\right)^2 = \frac{(3a^4)^2}{(2a^3)^2}$$

Utilizando la quinta y cuarta ley de los exponentes:

$$(xy)^n = x^n y^m$$

$$(x^n)^m = x^{n*m}$$

Tenemos que:

$$\frac{(3a^4)^2}{(2a^3)^2} = \frac{(3)^2(a^4)^2}{(2)^2(a^3)^2} = \frac{9a^8}{4a^6}$$

Finalmente, utilizando la tercera ley de los exponentes:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Tenemos que:

$$\frac{9a^8}{4a^6} = \frac{9}{4}a^2$$

e) $(2z)^{-4}$

Utilizando la séptima y quinta ley de los exponentes:

$$y^{-n} = \frac{1}{y^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^m$$

Tenemos que:

$$(2z)^{-4} = \frac{1}{(2z)^4} = \frac{1}{16z^4}$$

Serie de ejercicios 5

Utilizando las leyes de los exponentes, simplifica las siguientes expresiones hasta su mínima expresión.

1. $(7y)^4 =$
2. $(4x^2y^2)^2 =$
3. $(-5x)^0 =$
4. $(-3a^4)^{-3} =$
5. $\left(\frac{5m^5n^6}{10m^4n^7}\right)^3 =$
6. $\frac{(3x^{-4}y^2)^3}{(2x^3y^5)^2} =$
7. $(5r^2q^{-2})(-2r^5q^2) =$
8. $\frac{27x^3y^2}{9xy} =$
9. $\frac{(x^{-2})(4x^2)}{x^3} =$
10. $\left(\frac{9x^2}{xy}\right)^{-2} =$

Leyes de los radicales

Se dice que y es la raíz enésima del número x, si y solo sí $y^n = x$; es decir, $y = \sqrt[n]{x}$.

La radicación es la operación inversa a la potenciación, igual que en las potencias, en los radicales existen algunas propiedades o leyes que permiten trabajarlos adecuadamente.

Si x e y representan números reales, entonces se cumplen las siguientes leyes de los radicales:

1. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
2. $\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$
3. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$
4. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ con $y \neq 0$

Ejemplo 27

Utilizando las leyes de los radicales simplifica cada una de las siguientes operaciones o expresiones algebraicas:

a) $\sqrt[2]{a^3} =$

Utilizando la primera ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Tenemos lo siguiente:

$$\sqrt[2]{a^3} = \pm a^{\frac{3}{2}}$$

Es importante mencionar que las raíces pares tienen doble signo, es decir, $\pm$. Lo anterior por lo siguiente:

Supongamos que vamos a obtener la raíz cuadrada de 16, resulta que su operación inversa en la potenciación, entonces tendríamos que buscar un número que multiplicado por sí mismo nos diera como resultado el 16, el primer número que podríamos pensar es el 4, ya que $4^2 = 16$; sin embargo, existe otro número que al multiplicarlo por sí mismo nos da como resultado 16, y ese número es el -4; es decir, $(-4)^2 = 16$; debido a esto, es que las raíces cuadradas y en general, cualquier raíz par, genera un resultado con signo $\pm$.

b) $\sqrt[3]{x^3} =$

Utilizando la segunda ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{x^n} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

Tenemos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{x^3} = x^{\frac{3}{3}} = x^1 = x$$

En este caso, al tratarse de una raíz impar, el resultado solo tiene un signo, para este ejemplo, es positivo, puesto que el número dentro del radical es positivo también.

c) $\sqrt[3]{-8a^3b^6} =$

Utilizando la tercera ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

Tenemos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{-8a^3b^6} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6}$$

Ahora, utilizando la primera ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

tenemos lo siguiente:

$$\sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} = -2 \cdot a^{\frac{3}{3}} \cdot b^{\frac{6}{3}} = -2ab^2$$

d) $\sqrt{\frac{81m^6n^4}{49m^8n^2}} =$

Utilizando la cuarta ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

tenemos lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{81m^6n^4}{49m^8n^2}} = \frac{\sqrt{81m^6n^4}}{\sqrt{49m^8n^2}}$$

Ahora, utilizando la tercera de los radicales:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

Tenemos que:

$$\frac{\sqrt{81m^6n^4}}{\sqrt{49m^8n^2}} = \frac{\sqrt{81} \cdot \sqrt{m^6} \cdot \sqrt{n^4}}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{m^8} \cdot \sqrt{n^2}}$$

Después, utilizando la primera ley de los radicales:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Finalmente, tenemos lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{81} \cdot \sqrt{m^6} \cdot \sqrt{n^4}}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{m^8} \cdot \sqrt{n^2}} = \frac{\pm 9 \cdot m^{\frac{6}{2}} \cdot n^{\frac{4}{2}}}{\pm 7 \cdot m^{\frac{8}{2}} \cdot n^{\frac{2}{2}}} = \pm \frac{9m^3n^2}{7m^4n}$$

Ahora bien, la expresión anterior, aún no queda simplificada del todo, será necesario utilizar la tercera ley de los exponentes:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Finalmente, tenemos que:

$$\pm\frac{9m^3n^2}{7m^4n} = \pm\frac{9n}{7m}$$

e) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{108}$

En este tipo de ejercicios es necesario descomponer el valor del radical en factores, de tal manera que cada radical tenga un factor con raíz exacta. Así podemos descomponer los números anteriores de la siguiente manera:

$$\sqrt{(3)(25)} + \sqrt{(3)(16)} - \sqrt{(3)(36)}$$

Podemos ver que el 25, 16 y 36 tienen raíz cuadrada exacta, aplicando la tercera ley de los radicales tendríamos lo siguiente:

$$5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3}$$

Cada término de la expresión, tienen en común el radical $\sqrt{3}$, por lo tanto, podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$3\sqrt{3}$$

Serie de ejercicios 6

Utilizando las leyes de los radicales, simplifica las siguientes expresiones hasta su mínima expresión.

1. $\sqrt[4]{b^{10}} =$
2. $\sqrt[5]{a^5} =$
3. $\sqrt{25x^3y^4z^6} =$
4. $\sqrt{\frac{25a^4}{81}} =$
5. $\sqrt[3]{\frac{8a^4b^{10}c}{27ab^4c}} =$
6. $\sqrt[3]{-64a^6y^9} =$

7. $\sqrt{\left(\frac{8x^2y^3}{2xy}\right)^4} =$
8. $\sqrt[5]{-a^8b^3} =$
9. $\sqrt{125} + \sqrt{80} + \sqrt{45} =$
10. $\sqrt{200} + \sqrt{8} - \sqrt{162} =$

Respuestas a las series de ejercicios

Serie de ejercicios 1

a) 55
b) - 6
c) - 30
d) -10
e) 23

Serie de ejercicios 2

1.a) $\frac{39}{9}$
1.b) $\frac{42}{189}$
1.c) $\frac{70}{84}$
2.a) MCD = 13 mcm = 780
2.b) MCD = 65 mcm = 1560
2.c) MCD = 14 mcm = 1008
3. en 48 tiempos
4. Los botes deben ser de 4 litros y deberá comprar 3 botes de pintura roja, 6 botes de pintura verde y 4 botes de pintura blanca.
5. Faltan 81 días.
6. En cada contendor debe haber 12 peces, y debe haber 4 contendores de peces payaso, 5 contendores de peces globo, 3 contenedores de tiburones bebés, 2 contenedores de pulpos y 6 contendores de peces león.

Serie de ejercicios 3

1. $\frac{23}{12}$
2. -1
3. $\frac{20}{9}$
4. $\frac{49}{8}$
5. 8

6. $\frac{1305}{32}$
7. $-\frac{5200}{189}$
8. $\frac{121}{200}$
9. $\frac{1}{4}$
10. $\frac{61}{168}$

Serie de ejercicios 4

1.a) $1.\overline{6}$ 1.b) $1.1\overline{6}$ 1.c) $0.\overline{09}$ 1.d) $1.6\overline{0}$

2.a) 40% 2.b) 375% 2.c) $283.\overline{3}\%$ 2.d) $43.7\overline{437}\%$

3.a) $\frac{21}{4}$ 3.b) $\frac{9}{25}$ 3.c) $\frac{7}{11}$ 3.d) $\frac{13}{9}$ 3.e) $\frac{4061}{90}$

4) 62.5%

5) $83,333.33

6) 80 familiares, 40 compañeros de trabajo, 60 amigos y 20 conocidos.

7) 32% de bolas rojas, 8% de bolas verdes, 20 % de bolas naranjas, 16% de bolas azules y 24% de bolas rosas.

8) Hay 2400 mujeres.

9) Se evaporarán 125,000 litros.

10) 300 animales.

Serie de ejercicios 5

1. $2401y^2$
2. $16x^4y^4$
3. 1
4. $-\frac{1}{27a^{12}}$
5. $\frac{m^3}{8n^3}$
6. $\frac{27}{4x^{18}y^4}$
7. $-10r^7$
8. $3x^2y$
9. $\frac{4}{x^3}$

10. $\frac{y^2}{81x^2}$

Serie de ejercicios 6

1. $\pm b^{\frac{10}{4}}$
2. a
3. $\pm 5xy^2z^3$
4. $\pm \frac{5}{9}a^2$
5. $\frac{2}{3}ab^2$
6. $-4a^2y^3$
7. $\pm 16x^2y^4$
8. $-a^{\frac{8}{5}}b^{\frac{3}{5}}$
9. $12\sqrt{5}$
10. $3\sqrt{2}$

MATEMÁTICAS I

UNIDAD II. Variación directamente proporcional y Función lineal

Propósito:

Al finalizar, el alumno:

Modelará y analizará situaciones que involucren la variación entre dos cantidades en los casos en que la razón de sus incrementos sea proporcional; utilizando los registros de tabulación, gráfico y algebraico, con la finalidad de que se inicie en el estudio de la variación, la idea de relación funcional, sus conceptos asociados y, continúe la comprensión del lenguaje algebraico como la representación de la generalidad.

Contenido temático

- Variables independiente y dependiente
- Razón de cambio entre dos variables correlacionadas
- Representación tabular de la variación directamente proporcional entre dos magnitudes
- El patrón aditivo en una variación directamente proporcional
- El punto como representación de estados específicos de la variación
- Convenciones sobre escalas
- El patrón gráfico de una variación directamente proporcional
- Interpretación de los puntos del patrón gráfico como estados de la variación no registrados en una representación tabular
- El punto en el origen y la inclinación del gráfico como indicadores esenciales de una variación directamente proporcional
- Expresión simbólica sobre la generalidad y=ax como representación de una variación directamente proporcional
- Análisis contextual de la expresión simbólica y=ax
- El parámetro **a** como la rapidez de variación o razón de cambio
- El parámetro **a** como indicador de la inclinación del gráfico de la variación
- La constancia de **a** es una variación directamente proporcional
- El concepto de función lineal
- Representación analítica de una función lineal
- Identificación de los elementos definitorios de una función lineal empleando las representaciones gráficas y analíticas:
- Condición inicial
- Rapidez de variación

RAZÓN

Una razón es una comparación entre dos cantidades.
Ejemplo: Las edades de Luis y Mario son de 20 y 30 años respectivamente, a lo que podemos hacer una comparación para establecer la razón de las edades. 20:30, también se puede expresar en fracción $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{30}}$ simplificando nos queda $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

PROPORCIÓN

Se denomina proporción a la igualdad de dos razones.

Ejemplo 1: $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{30}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

VARIABLES Y CONSTANTES.

Las cantidades que intervienen en una expresión matemática son constantes cuando tienen un valor fijo y determinado y son variables cuando toman diversos valores. Esto se ejemplificará más adelante.

PROPORCIONALIDAD DIRECTA

Se dice que dos razones están en proporcionalidad directa si al aumentar o disminuir alguna de las variables aumenta o disminuye proporcionalmente la otra.

La condición para proporcionalidad directa está determinada por la fórmula o modelo matemático:

$$y = k\,x$$

Donde **k** es la constante de proporcionalidad, ***x***, ***y*** son las variables. La literal ***x*** es llamada variable independiente mientras que ***y*** es llamada variable dependiente.

Ejemplo 2:

En su tienda de víveres, Carlos relaciona en una tabla el peso (en kilogramos) del huevo y el precio correspondiente.

Veamos la siguiente tabla.

Peso del producto (kg)	Precio ($)
1	28
2	56
3	84
4	112
5	140
6	168
7	196
8	224

Si determinamos algunas razones entre el precio y los kilogramos de huevo obtendríamos las siguientes razones:

$k = \frac{28}{1}$, $k = \frac{56}{2}$, $k = \frac{84}{3}$, $k = \frac{112}{4}$, $k = \frac{140}{5}$

Como veras 28 es el resultado de cada una de las razones por lo que concluimos que 28 es un valor constante, a este valor constante lo llamamos constante de proporcionalidad.

Si establecemos una fórmula matemática que nos represente la variación entre peso (P) y número de kilos (N) tendríamos lo siguiente: $P = kN$

Sustituyendo la constante por el valor encontrado nos quedaría:

$$P = 28N$$

Observa que conforme aumenta el número de kilos, aumenta el precio del huevo, ambas variables aumentan y la razón con la que aumenta es 28.

Recordando la condición de proporcionalidad directa mencionada anteriormente y reemplazando P por la variable dependiente y, N por la variable independiente x, obtenemos:

$y = 28x$

Ejemplo 3:

Un automóvil recorre 120 kilómetros en una hora. Observa la siguiente tabla donde se muestra la distancia recorrida para diferentes valores de tiempo.

Tiempo (h)	Distancia (km)
3	360
$2\frac{1}{2}$	300
2	240
$1\frac{1}{2}$	180
1	120
$\frac{1}{2}$	60
$\frac{1}{4}$	30

¿Cuál es la variable dependiente? ____

¿Cuál es la variable independiente? _______________________________________

¿Cuál es el valor de la constante? ____

¿Cuál es el modelo matemático que nos represente al problema? ______________

Conclusión:

Dos magnitudes son dependientes una de otra, cuando al aumentar una de ellas la otra también aumenta. O cuando una de ellas disminuye y la otra también lo hace.

Cuando el cociente entre dos magnitudes es constante, decimos que las magnitudes son directamente proporcionales. Este cociente se denomina ***constante de proporcionalidad.***

La variación de una magnitud en forma proporcional a otra se puede representar gráficamente.

Ejemplo 4:

En una explotación ganadera para la alimentación diaria de 30 terneras se necesitan 210 kg. de alimento. Los dueños van a ampliar el ganado con 20 reses más y necesitan calcular las nuevas necesidades alimenticias, sabiendo la cantidad de alimento es directamente proporcional al número de terneras calcula la cantidad de alimento necesaria para sus terneras.

¿Cuánto alimento tendrán que comprar para las 50 terneras?

¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? ¿Qué cantidad de alimento es necesaria para sus terneras?

Traza una gráfica que nos represente esta variación directa

Solución:

Primero debemos identificar cuáles son las variables dependiente e independiente.

Como la cantidad de alimento depende del número de terneras concluimos que:

Variable independiente: Numero de terneras (x)

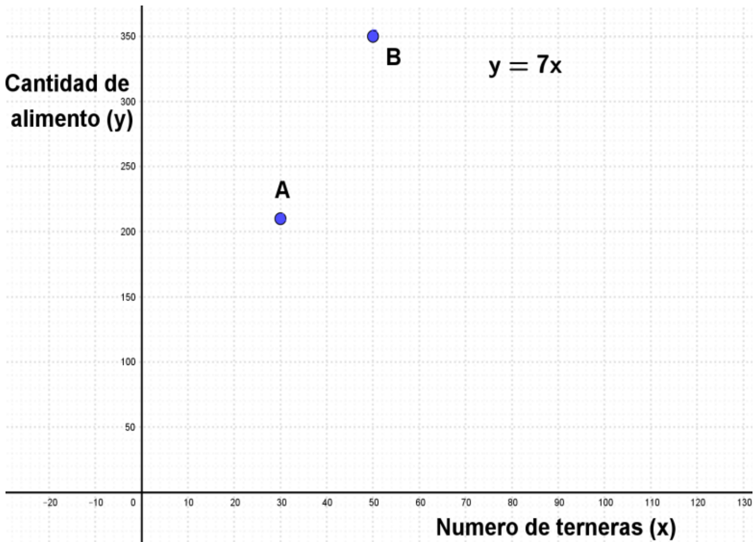
Variable dependiente: Cantidad de alimento (y)

Ecuación: y= kx

Sustituyendo los valores iniciales:

$210 = 30k$ $\quad\quad k = \frac{210}{30}$ $\quad\quad \boldsymbol{k = 7}$

Para 50 terneras ¿cuánto alimento se necesita?



$y = 7(50)$

$y =$ $350\ kg$ es la cantidad de alimento necesaria para las 50 terneras

Con los datos del problema podemos realizar una tabla

x	y	$k = \frac{y}{x}$
30	210	$k = \frac{210}{30}$ $\quad k = 7$
50	350	$k = \frac{350}{50}$ $\quad k = 7$

Con los datos de la tabla formamos dos puntos (30,210) y (50,350) podemos trazar una grafica

Al aumentar el número de terneras aumenta la cantidad de alimento, ambas variables aumentan con la misma proporción que en este caso es 7. Por lo tanto, hay variación directamente proporcional.

Ejemplo 5:

Los pagos mensuales p de una hipoteca varían directamente con la cantidad de préstamo B. si el pago mensual sobre una hipoteca a 30 años es $ 7.5 por cada $1000 de préstamo, encuentre la formula o modelo matemático que relaciona el pago mensual p con la cantidad prestada B para una hipoteca en estos términos.

Calcule el pago mensual p cuando la cantidad prestada es de $120,000.

Solución:

p: pago mensual, variable dependiente (y)

B: cantidad de préstamo, variable independiente (x)

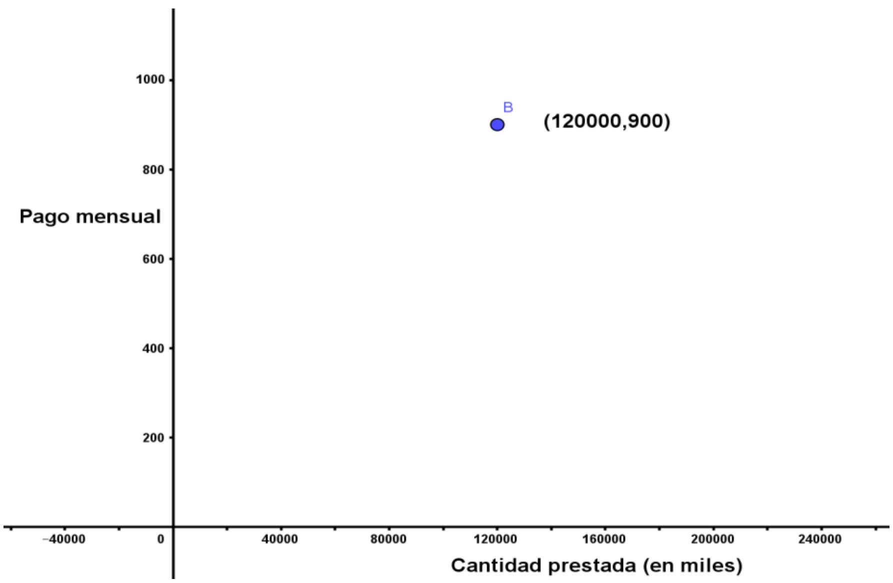
Modelo matemático: $p = kB$

Constante de proporcionalidad: $k = \frac{7.5}{1000}$ $k = 0.0075$

De manera que nuestra ecuación nos queda: $p = 0.0075B$

Cuando B=$120,000 el valor de p es: $p = 0.0075(120{,}000)$ $p = \$900$

La representación gráfica de nuestro problema es:



Ejemplo 6:

Completa la siguiente tabla e indica si hay variación directamente proporcional.

Y		$\frac{5}{4}$		2		$\frac{11}{4}$
X	2		7	8	9	

Solución:

Para poder completar la tabla debemos establecer nuestra ecuación:

$$y = kx$$

Observemos que, de los datos proporcionados en la tabla, se conoce una sola pareja de valores, sustituyéndolos en la ecuación nos queda de la siguiente manera:

$$2 = k8$$

Despejando la constante y simplificando: $k = \frac{2}{8}$ $\quad k = \frac{1}{4}$

La ecuación por usar es: $y = \frac{1}{4}x$

Con la ecuación establecida completaremos la tabla.

$y = \frac{1}{4}(2) \qquad y = \frac{1}{4}$

Para obtener el valor de x debemos despejar en nuestra ecuación:

$$x = \frac{y}{k} \qquad x = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{20}{4} = 5$$

Realizando los respectivos despejes nuestra tabla queda finalmente:

y	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\frac{5}{4}$	$\mathbf{\frac{7}{4}}$	2	$\mathbf{\frac{9}{4}}$	$\frac{11}{4}$
x	2	**5**	7	8	9	**11**

Para saber si hay variación directa, debemos calcular la constante para cada pareja de valores.

$$x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{1}} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad x = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{1}} = \frac{5}{20} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad x = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{1}} = \frac{7}{28} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad x = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{1}} = \frac{9}{36} = \mathbf{\frac{1}{4}} \qquad x = \frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{1}} = \frac{11}{44} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Como podrás observar que, al hacer los respectivos cálculos, la constante es la misma para cada pareja de datos, lo que concluimos que hay variación directamente proporcional.

Serie de ejercicios 1

1. Un peso de 15 g. alarga un resorte 5 cm. ¿Qué peso lo alarga 12 cm, si la elongación es directamente proporcional al peso? Indica cuál es la variable dependiente, independiente, el valor de la constante de proporcionalidad y el peso.

2. Se dice que el peso de una persona es directamente proporcional con su estatura con una constante de proporcionalidad de k= 0.375, ¿cuánto pesará una persona que mide 160 cm?

3. El peso de un objeto (W) de la superficie terrestre es directamente proporcional a su masa (m). Si el peso del objeto es 92 cuando su masa es de 72. Encuentre la masa si el peso es de 110.

a) Indica cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente

b) La ecuación que me represente el problema

c) El valor de la constante

d) El valor de la masa

4. La fuerza (F) necesaria para mover un objeto sobre un plano varía proporcionalmente con el peso (W) del mismo. Si se aplica una fuerza de 65 N a un objeto que pesa 50kg, cuál será el peso si se aplica una fuerza de 95 N.

a) Indica cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente

b) La ecuación que me represente el problema

c) El valor de la constante

d) El valor del peso

5. El importe del impuesto sobre ventas de un auto nuevo es directamente proporcional al precio de venta del auto, si un auto de $25000 paga $1750 de impuesto sobre ventas. ¿Cuál es el precio de venta de un coche nuevo que tiene un impuesto sobre ventas de $3500?

6. El costo de una casa en la Florida es proporcional al tamaño de la casa. ¿Una casa de 2850 pies cuadrados cuesta $182400, entonces cuál es el costo de una casa de 3640 pies cuadrados?

7. Indica en que caso si hay variación directamente proporcional.

y	*9*	*13.5*	*18*	*22.5*	*27*
x	2	3	4	5	6

y	1	4	9	16	25
x	1	2	3	4	5

y	1	3	5	7	9
x	0	1	2	3	4

y	4	6	8	10	12
x	2	3	4	5	6

8. La resistencia de un cable eléctrico varía directamente con la longitud, si el cable mide 1600 m de longitud tiene una resistencia de 320 kΩ Kilo -ohmio. ¿Cuál será la resistencia del cable si su longitud se recorta a 900 m? Indica cuáles son las variables, el valor de la constante y la resistencia.

9. Un avión se desplaza a velocidad constante, de modo que la distancia que recorre varía directamente con el tiempo que lleva volando. Si recorre una distancia de 480 km en una hora, ¿en cuánto tiempo recorrerá 1240 km? Indica las variables y el valor de la constante.

Función lineal

La función lineal es una representación de la relación entre dos variables, esta representación la podemos hacer por medio de una gráfica en el plano cartesiano, la gráfica resultante es una línea recta.

La función lineal está determinada por:

$$\boldsymbol{y = mx + b}$$

Donde: ***m*** es la pendiente de la recta

b es la ordenada al origen, es decir, es el intercepto con el eje **y.**

m y b son números reales, el valor de la pendiente debe ser diferente de cero: $m \neq 0$

Para poder trazar la gráfica se necesitan parejas de puntos (x, y), dichos puntos los ubicamos en un plano cartesiano y como resultado obtendremos una línea recta, correspondiente a nuestra función lineal.

Ejemplo 7:

Tabula cada una de las funciones y traza la gráfica en el mismo plano cartesiano, utiliza colores para diferenciar cada función:

a) $y = x$

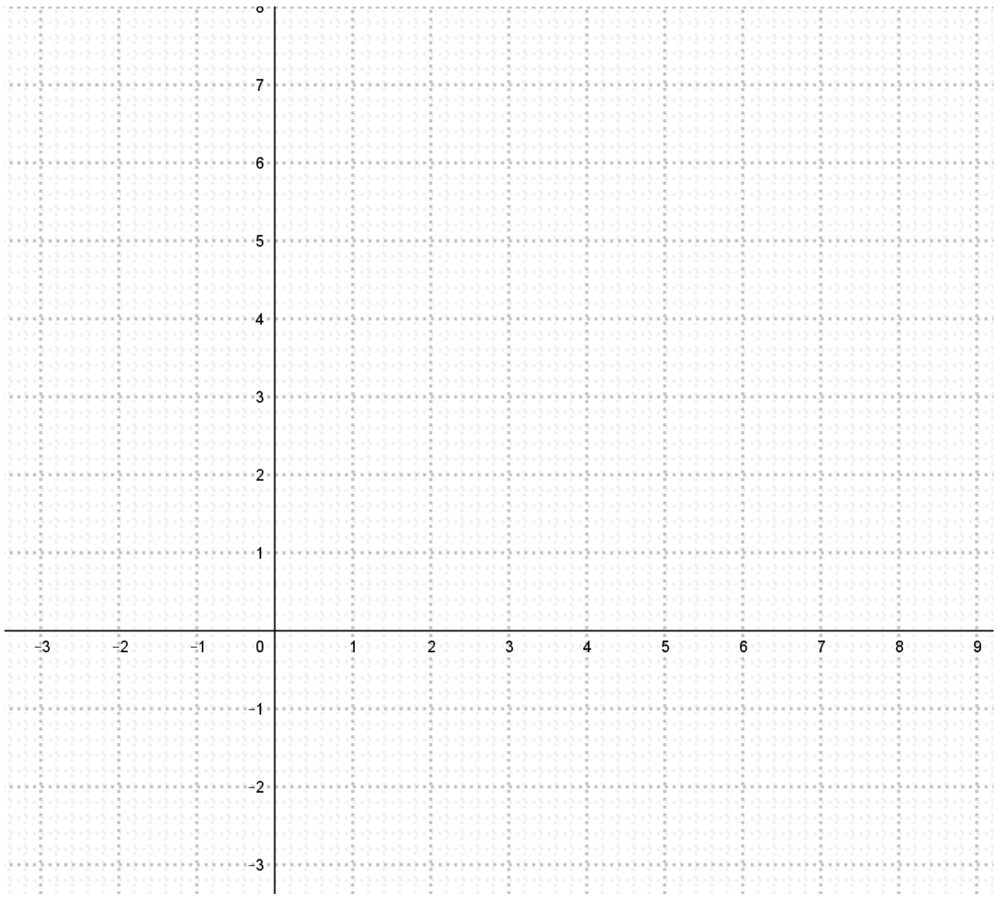
x	y = x

b) $y = 3x$

X	y = 3x

c) $y = \frac{x}{3}$

x	y = $\frac{x}{3}$

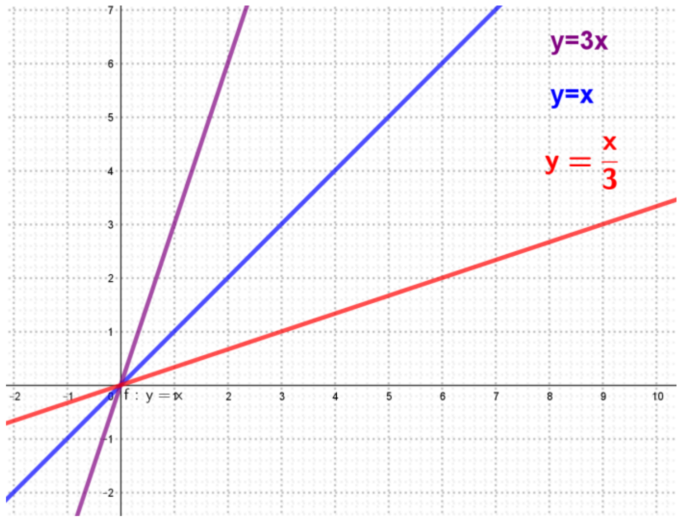


¿Qué es lo que observas en las gráficas? ________________________________

____

____

Al trazar las tres funciones en el mismo plano cartesiano, las rectas quedan como se muestra en el siguiente plano cartesiano.



Observa como al aumentar el valor de la pendiente la recta se inclina más hacia el eje "y", mientras que cuando el valor de la pendiente es pequeño, la línea se acerca más al eje "x", y las tres líneas pasan por el punto (0,0) y todas son positivas.

Ejemplo 8:

Tabula cada una de las funciones y traza la gráfica en el mismo plano cartesiano, utiliza colores para diferenciar cada función:

a) $y = -x$

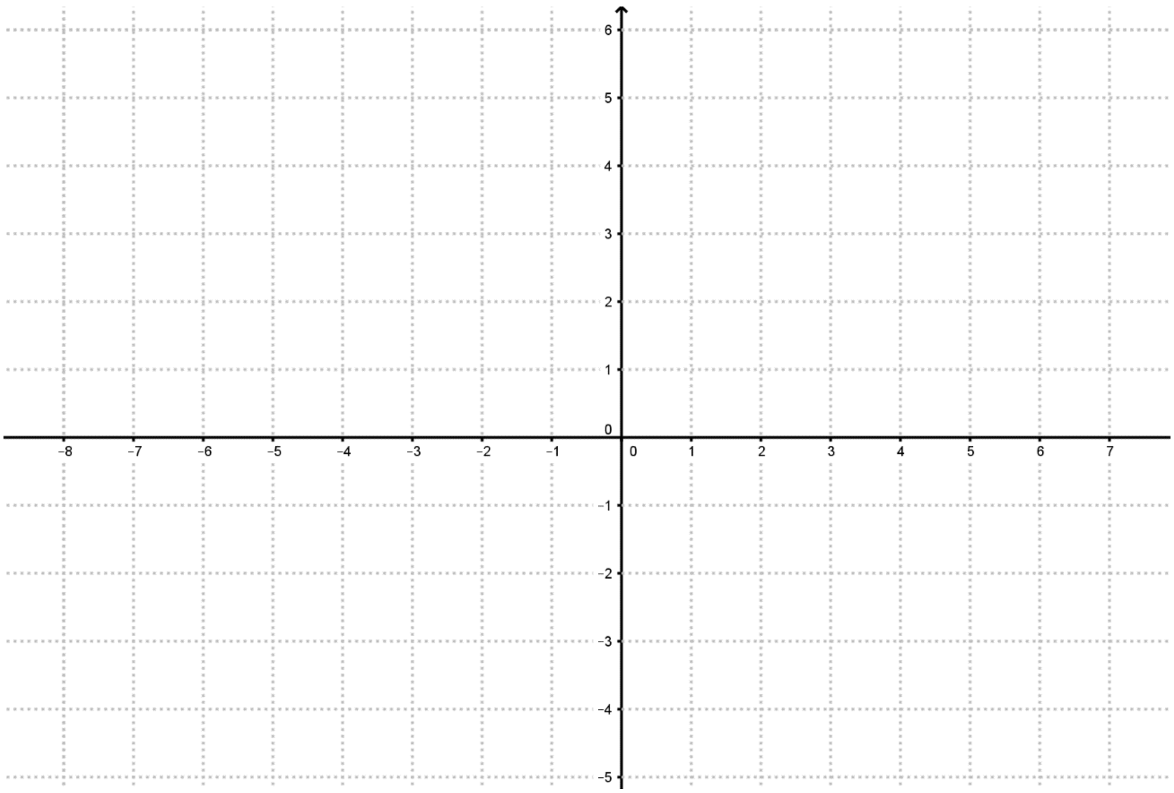
x	y = –x

b) $y = -2x$

x	y = –2x

c) $y = -\frac{x}{2}$

x	$y = -\frac{x}{2}$



¿Qué sucedió con las rectas? ____

____

____

¿Crees que se puede identificar con ver la función hacia donde se inclinarán las rectas? ____

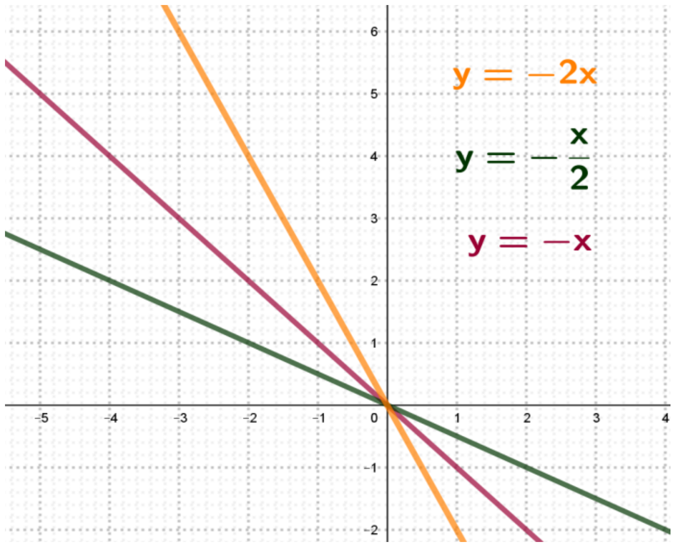
El signo de la función tiene algún significado importante ______________________

____

¿Comó cree que sería la gráfica de la función $y = 6x$ con respecto a las funciones anteriores? ____

____

Observa como las rectas cambian de posición, es decir se inclinan hacia el lado izquierdo debido a que sus pendientes son negativas y cuando el valor de la pendiente aumenta, la recta se inclina más hacia el eje “y”, cuando el valor es pequeño su inclinación es hacia el eje “x”, o bien se dice que la función es más abierta.



Ejercicio 9:

Tabula y traza la gráfica de las siguientes funciones, utiliza planos diferentes.

a) $y = 2x + 3$ b) $y = x - 2$ c) $y = 2x + 1$

x	$y = 2x + 3$

x	$y = x - 2$

x	$y = 2x + 1$

Escribe tus observaciones y discútelas con tus compañeros.

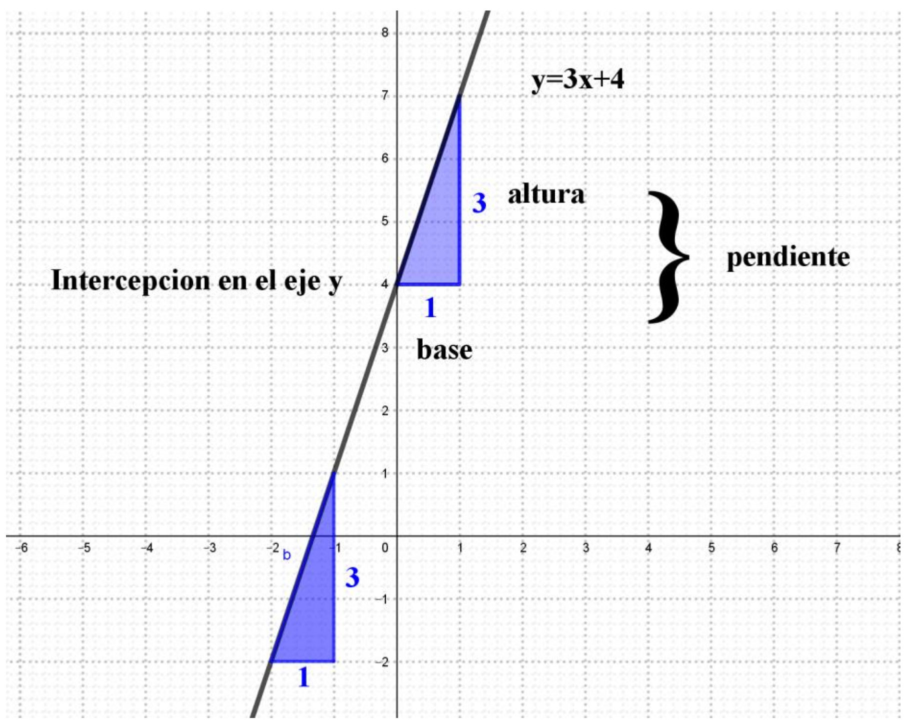
Parámetros de la función lineal

En la siguiente grafica se muestra la función: $y = 3x + 4$

$m = 3$ valor de la pendiente

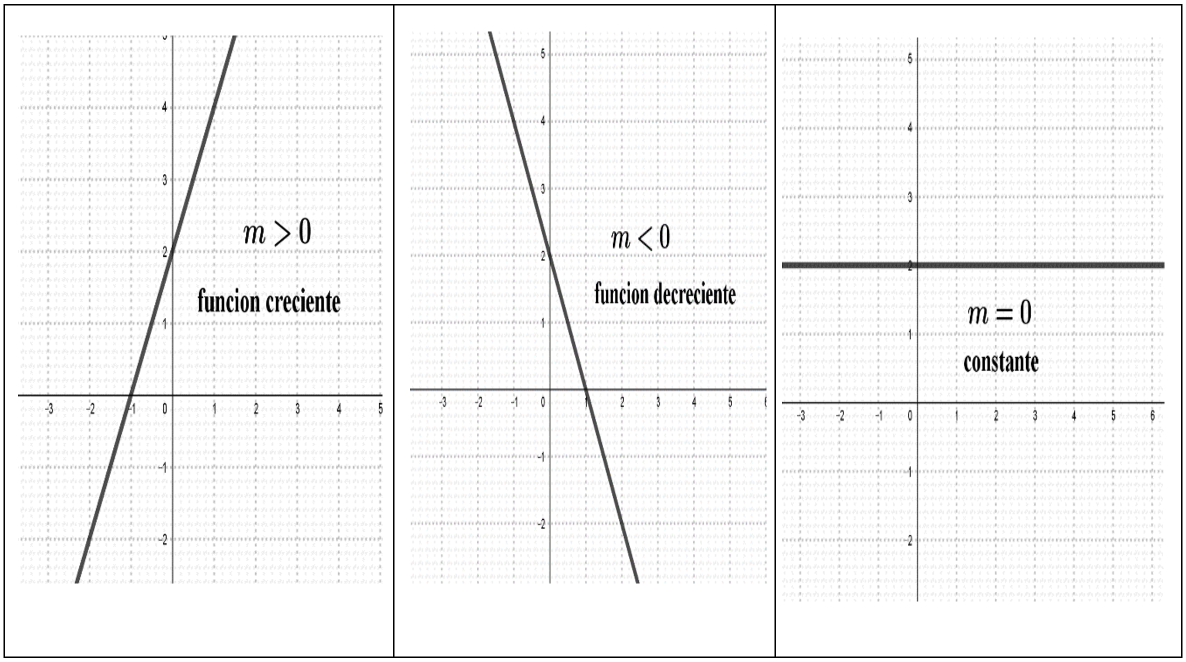
$b = 4$ ordenada al origen

La función es creciente debido a que el valor de la pendiente es mayor que cero, el valor de la ordenada es 4, es el intercepto en el eje "y"



La pendiente es igual a una razón de incrementos, es decir, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{sube\ o\ baja}{avanza}$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ si la pendiente tiene un valor de m = 3 significa que sube 3 unidades y avanza 1 unidad a la derecha.



En la primera gráfica observamos que cuando el valor de pendiente es mayor que cero, la función es creciente, es decir la pendiente es positiva.

En la segunda gráfica se muestra que cuando el valor de la pendiente es menor que cero, la recta es decreciente, es decir la pendiente es negativa.

En el tercer gráfico se muestra una línea recta horizontal, es decir esta recta no tiene inclinación debido a que el valor de la pendiente es cero, se dice que la función es constante.

Ejemplo 10:

A partir de la siguiente función $\boldsymbol{y = 2x - 3}$ indica cual es el valor de la pendiente y el valor de la ordenada al origen y traza su gráfica.

$m =$ _____________ $b =$ _______________

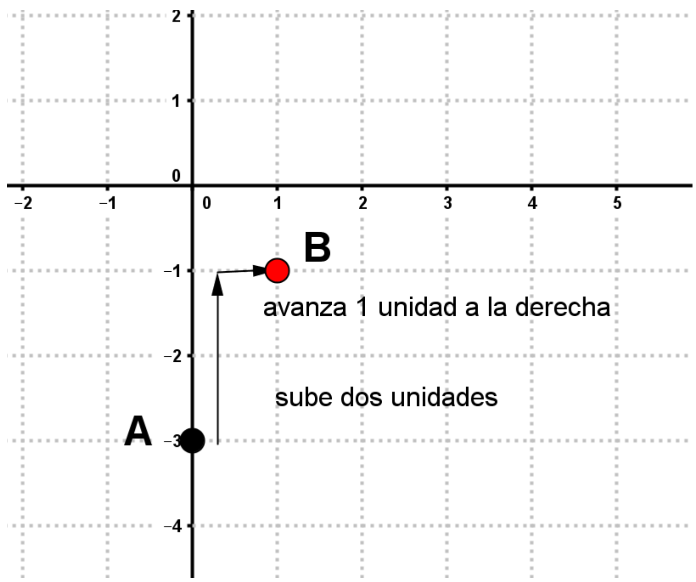
Respuesta:

$m = 2$ $m = \frac{2}{1}$ $m = \frac{sube\ 2\ unidades}{avanza\ 1\ unidad\ a\ la\ derecha}$ $b = -3$ es la ordenada al origen, es decir, el intercepto en y A$(0, -3)$

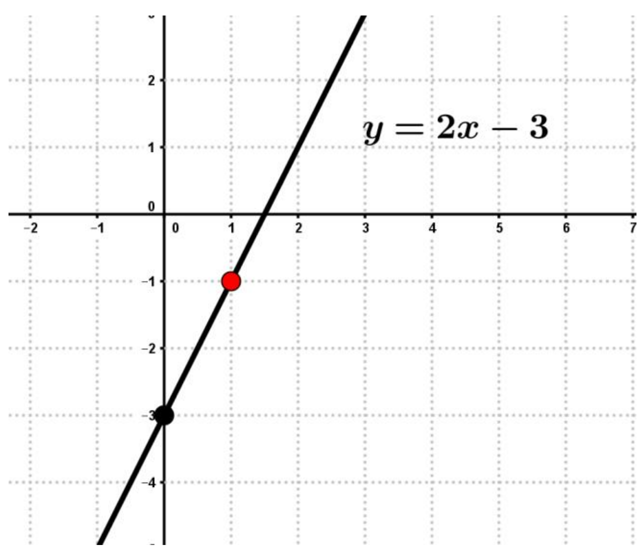
Con estos datos podemos trazar la gráfica sin tabular

Lo primero es ubicar la ordenada al origen (0, b) y a partir de ese punto subiremos o bajaremos, según el signo de la pendiente y avanzaremos a la derecha.

Tracemos $\boldsymbol{y = 2x - 3}$ $\boldsymbol{m = 2}$ $\boldsymbol{b = -3}$ ubicamos $A(0, -3)$ y a partir de ese punto subimos dos unidades debido a que la pendiente es positiva y caminamos o avanzamos 1 unidad a la derecha como se muestra en el plano cartesiano. Con estos datos observamos que se forma un punto al que llamaremos B, la coordenada formada es $B(1, -1)$.



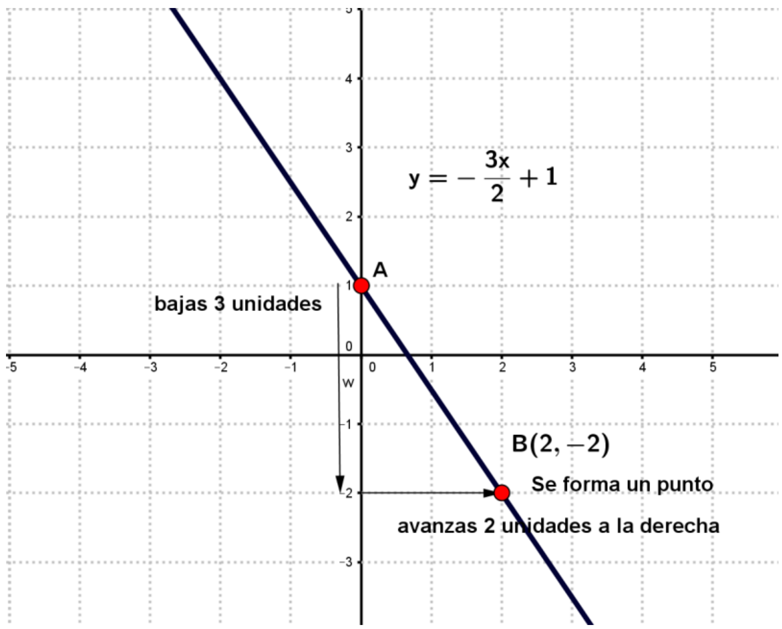
Unimos los dos puntos para tener la gráfica de nuestra función lineal.



Ejemplo 11:

Traza la gráfica de la función $y = -\frac{3}{2}x + 1$

$b = 1\ ordenada\ al\ origen\ \ A(0,1)$. Coloca el punto A y a partir del punto ubicas a la pendiente $m = \frac{-3}{2}\ \ \frac{bajas\ 3\ unidades\ a\ partir\ del\ punto\ \ A}{avanzas\ a\ la\ derecha\ 2\ unidades}$.



Serie 2.

Traza la gráfica de las siguientes funciones lineales y da la coordenada del punto formado.

a) $y = \frac{4x}{3} - 2$

b) $y = \frac{x}{4} + 2$

c) $y = -3x + 1$

d) $y = x + 3$

e) $y = -\frac{x}{2}$

f) $y = -\frac{3x}{2} + 1$

g) $y = \frac{4x}{5} - 3$

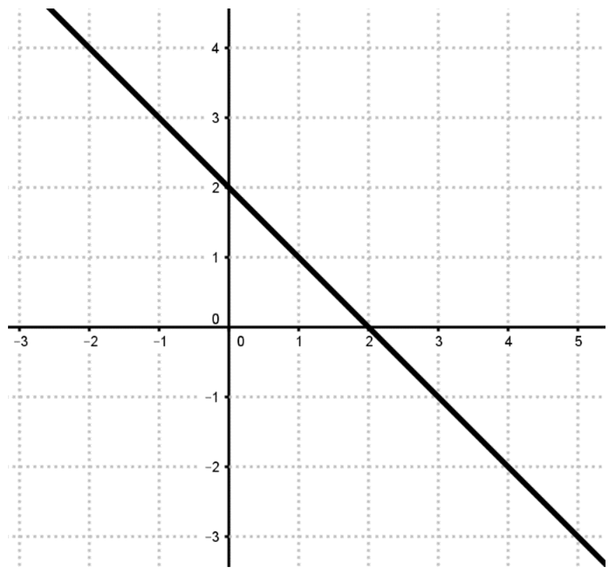
h) $y = -4x + 2$

i) $y = x - \frac{3}{2}$

j) $y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{2}$

Gráfica de la Función Lineal

A partir de la gráfica obtén la función correspondiente.



Para obtener la función $\boldsymbol{y = mx + b}$ debemos obtener la pendiente y el valor del intercepto en y, es decir de la ordenada al origen.

Para calcular la pendiente necesitaremos obtener de la gráfica dos coordenadas con valores enteros por ejemplo $A\ (3, -1)$ y la coordenada $B\ (5, -3)$ y los valores los sustituiremos en $\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

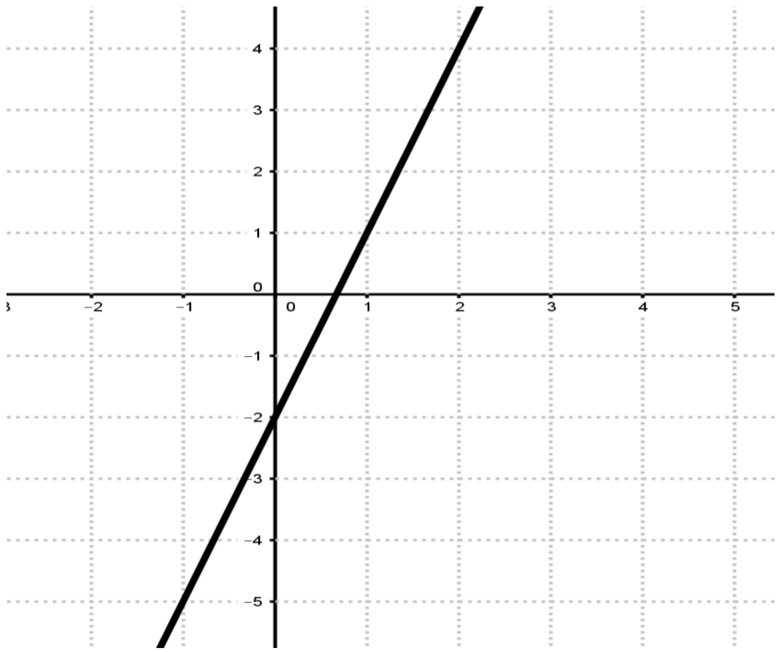
Tomaremos al punto B como la pareja 2 y sustituimos.

$\boldsymbol{m = \frac{-3-(-1)}{5-3}}$ $\boldsymbol{m = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1}$

La ordenada al origen es $b = 2$ este valor y el valor calculado de la pendiente se sustituye en la formula $\boldsymbol{y = mx + b}$ y nos queda finalmente $\boldsymbol{y = -x + 2}$.

Ejemplo 12:

A partir de la gráfica obtén la función lineal correspondiente



Obtenemos de la gráfica dos puntos o coordenadas enteras como $B\ (-1,-5)$ y $D\ (0,-2)$.

Calculamos la pendiente $\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{-2-(-5)}}{\mathbf{0-(-1)}} = \frac{\mathbf{-2+5}}{\mathbf{1}}$ $\quad \boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{1}}$ $\quad \boldsymbol{m} = \mathbf{3}$

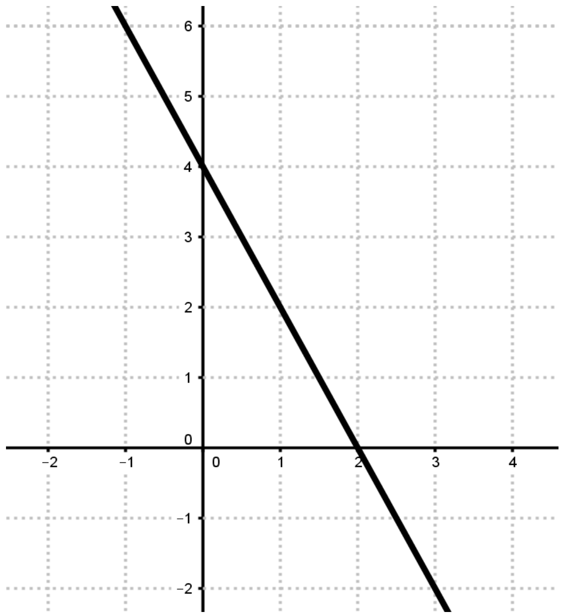
La ordenada es $\boldsymbol{b} = \mathbf{-2.}$

La función que corresponde a la gráfica es $\quad \boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2.}$

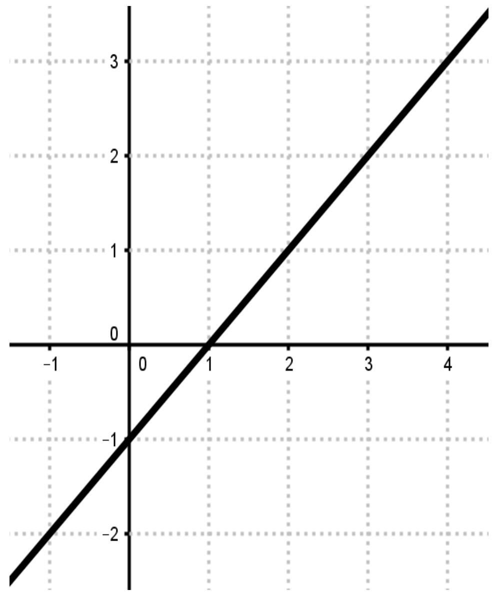
Serie 3

Obtén la función lineal para cada una de las siguientes gráficas.

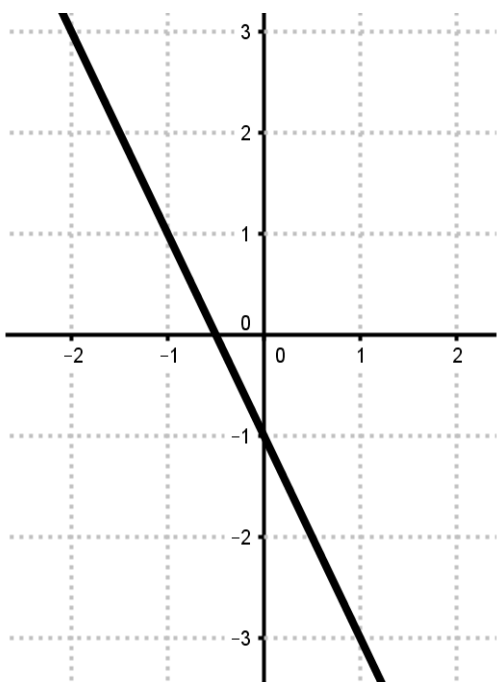
a)



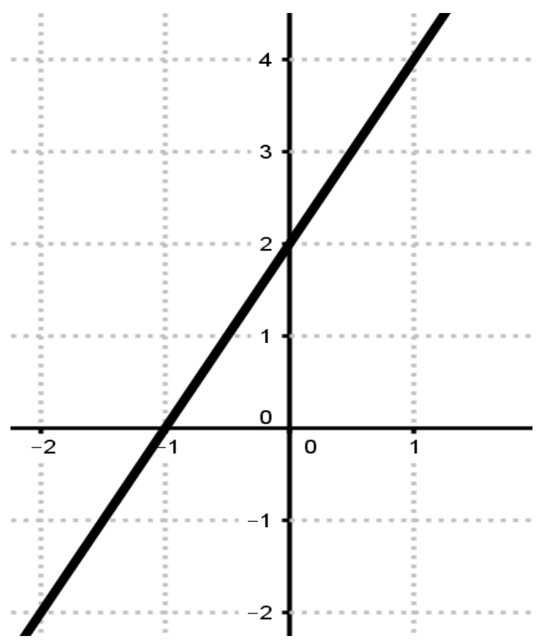
b)



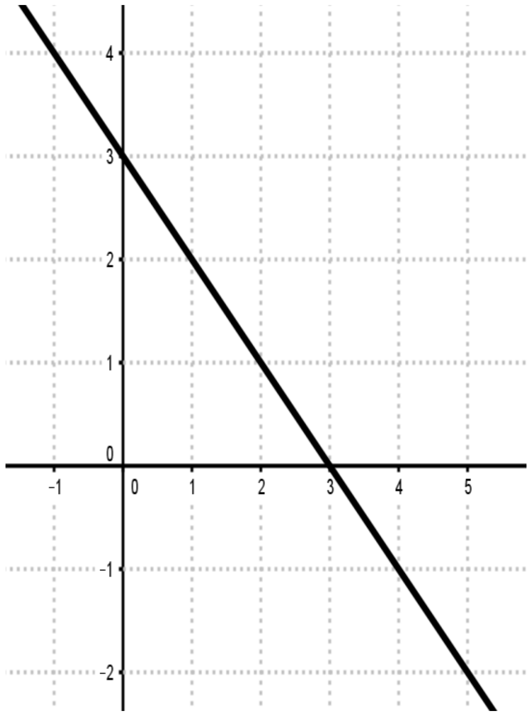
c)



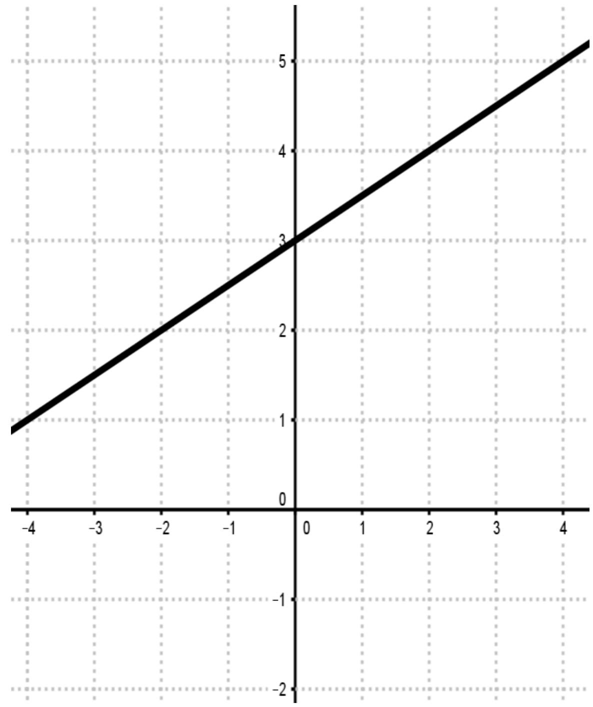
d)



e)



f)



Problemas de aplicación

Ejemplo 13:

Un algodonero recoge 30 Kg cada hora, y demora media hora preparándose todos los días cuando inicia la jornada. La función lineal que representa esta situación es:

$y = 30x - 15$ donde ***y*** representa los Kg de algodón recogido y ***x*** el tiempo transcurrido en horas.

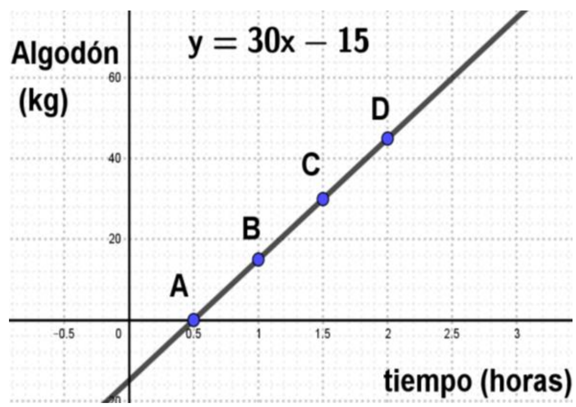
Realiza una tabla para la función y grafícala.

¿Cuántos Kg de algodón se recogerán en una jornada de 8 horas?

Solución:

Realizamos nuestra tabulación y la gráfica que represente a la función.

x (tiempo transcurrido en horas)	$y = 30x - 15$ (kg de algodón recogido)
0.5	0
1.0	15
1.5	30
2.0	45



Para saber cuánto algodón se recoge en 8 horas, realizamos lo siguiente:

$y = 30x - 15$ reemplazamos x por 8.

$y = 30(8) - 15$

$y = 225$, entonces se recogen 225 kg de algodón en una jornada de 8 horas.

Depreciación lineal.

Una universidad adquiere un aparato para ejercicio con un valor de $12000 para el nuevo centro de acondicionamiento físico del campus.

El aparato tiene una vida útil de 8 años. El valor de salvamento al final de los 8 años es de $2000, de una función lineal que describa el valor del aparato cada año.

Solución:

V (valor del aparato al final del año)

t valor inicial del aparato

De acuerdo con los datos del problema tenemos dos puntos:

A (0,12000) C (8,2000)

Con estos puntos determinamos el valor de la pendiente.

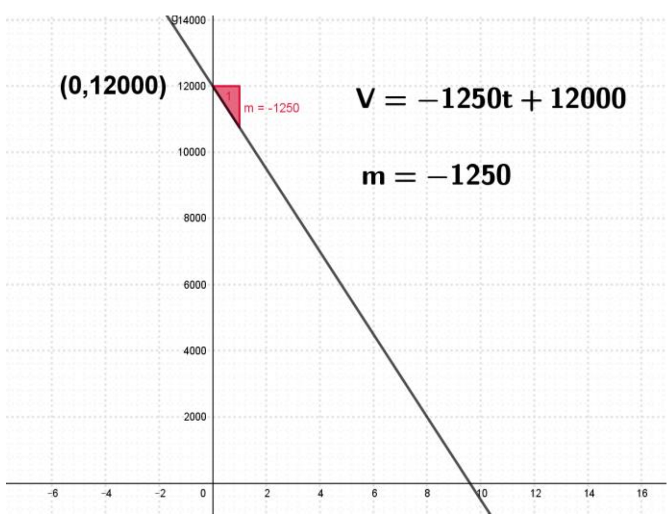
$m = \frac{2000-12000}{8-0}$ $\qquad m = -1250$

La pendiente $m = -1250$ nos indica la depreciación anual en dólares por año.

Nuestra función lineal nos queda:

$$V = -1250t + 12000$$

Si realizamos una tabla nuestra gráfica quedaría de la siguiente forma:



Serie 4

1. Un vendedor de pólizas de seguros recibe un sueldo diario de \$80 y una comisión de \$50 por cada póliza vendida.

a) ¿Cuál es la función que represente nuestro problema?

b) Si vendió 15 pólizas en un día ¿cuánto ganó?

c) Si en su día recibió \$630 ¿cuántas pólizas vendió?

2. El pago del servicio telefónico consiste en una renta de \$180 que incluye hasta 100 llamadas locales, pero adicionalmente se cobra \$1.50 por cada llamada extra.

a) Escribe la función que represente el problema.

b) ¿Cuánto se pagará si se realizan 20 llamadas extra?

c) Traza una gráfica que represente el problema.

3. Un vendedor de enciclopedias infantiles gana \$750 a la semana más \$300 por cada enciclopedia vendida.

a) Escribe la función que nos representa el salario del vendedor para x enciclopedias infantiles vendidas.

b) ¿Cuántas enciclopedias tiene que vender para ganar \$10,350?

c) Traza la gráfica que represente a esta función.

4. Una compañía de fabricación de electrodomésticos determina que el costo total en dólares de producción (y), x unidades de licuadoras está determinado por la función: $C = 25x + 3500$.

a) ¿Cuál es el costo fijo de producción si se fabrican 20 licuadoras?

b) ¿Cuál es la intersección con el eje “y”?

c) Traza la gráfica que represente la función lineal.

5. El costo de un viaje en taxi depende del pago inicial fijo que es de \$8.00 más \$4 por cada kilometro recorrido.

a) Escribe la expresión algebraica que representa el problema.

b) ¿Cuánto pagará una persona que recorre 35 kilometros?

c) ¿Cuántos kilómetros recorrió si le cobraron $208 pesos?

d) Traza la gráfica que representa la función.

Respuestas a la Serie de ejercicios.

Serie 1.

1. a) El alargamiento o elongación es la variable dependiente.
   El peso es la variable independiente.
   b) La ecuación es $y = kx$ donde la constante de proporcionalidad es $k = \frac{1}{3}$.
   c) El peso es de 36 kg.

2. La constante la dan en decimal lo que equivale a $k = \frac{3}{8}$.
   Una persona que mide 160 cm pesa 60 kg.

3. a) El peso es la variable dependiente y la masa es la variable independiente.
   b) La ecuación es $y = kx \;\; o \;\; W = km$ donde la constante es $k = \frac{23}{18}$.
   c) El valor de la masa es $m = \frac{1980}{23} \quad o \quad m = 86.086kg$.

4. a) La fuerza es la variable dependiente (F) la variable independiente es el peso (W).
   b) La ecuación es: $F = kW$.
   c) El valor de la constante es $k = \frac{13}{10}$.
   d) El peso es de $W = \frac{950}{13} \;\; o \;\; W = 73.076\, kg$.

5. a) El importe es la variable dependiente y el precio de venta del auto es la variable independiente.
   b) La constante de proporcionalidad es $k = \frac{7}{100}$.
   c) El precio del auto es de $ 50,000.

6. a) El Costo de la casa es la variable dependiente y el tamaño es la variable

Independiente.

b) La constante de proporcionalidad es de $k = 64$.

c) El costo de la casa de 3640 ft^2 es de $ 232,960.

7. a) En la primera tabla se muestra que hay variación directamente proporcional, puesto que la constante de proporcionalidad es la misma, su valor es $k = \frac{9}{2}$.

   b) En la segunda tabla no hay variación directamente proporcional puesto que las constantes son diferentes para cada pareja de datos.

   c) En la segunda tabla no hay variación directamente proporcional puesto que las constantes son diferentes para cada pareja de datos.

   d) En la segunda tabla si hay variación directamente proporcional puesto que las constantes son iguales $k = 2$.

8. a) La variable dependiente es la resistencia y la variable independiente es la longitud.

   b) La resistencia es de 180 kΩ. disminuyó la resistencia y disminuyó la longitud con la misma proporción.

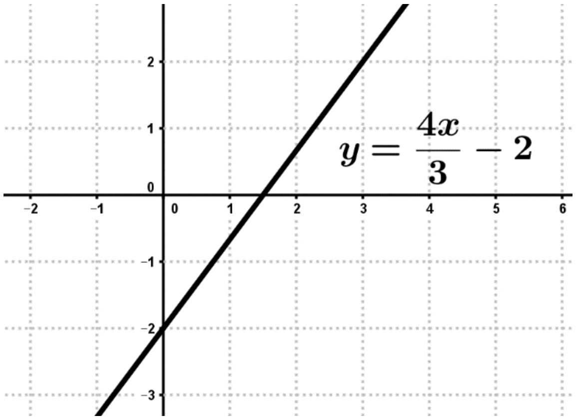
9. a) La variable dependiente es la distancia, el tiempo es la variable Independiente.

   b) El valor de la constante es $k = 480$.

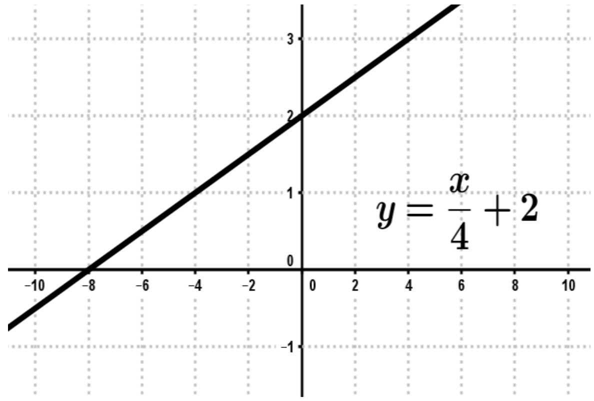
   c) El avión tarda 2.58 horas en recorrer 1235 km.

Serie 2

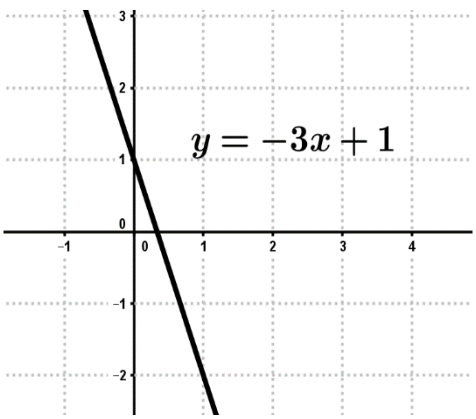
a) $B(3,2)$



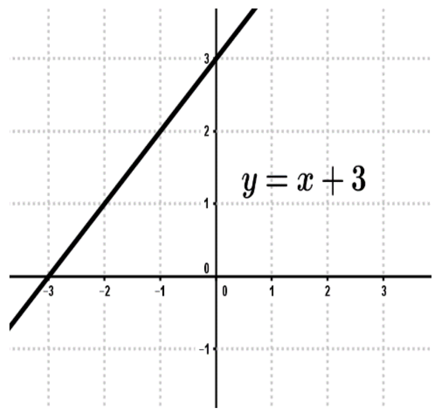
b) $B(4,3)$



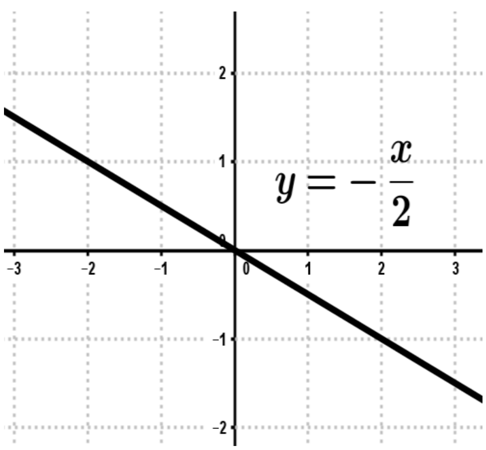
c) $B(1,-2)$



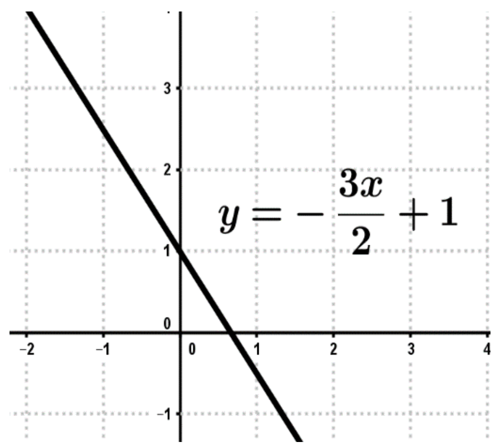
d) $B(1,4)$



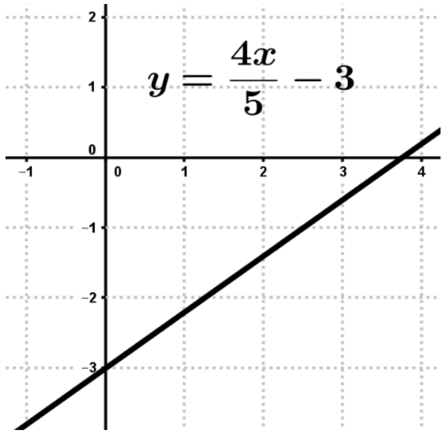
e) $B(2,-1)$



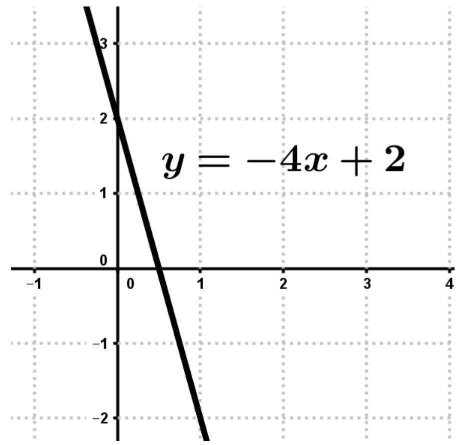
f) $B(2,-2)$



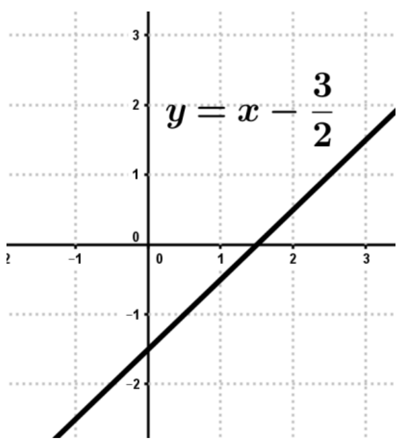
g) $B(5,1)$



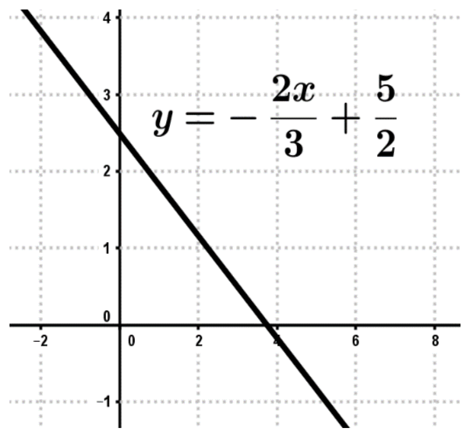
h) $B(1,-2)$



i) $B\left(1,-\frac{1}{2}\right)$



j) $B\left(3,\frac{1}{2}\right)$



Serie 3

a) $y = -2x + 4$

b) $y = x - 1$

c) $y = -2x - 1$

d) $y = 2x + 2$

e) $y = -x + 3$

f) $y = \frac{x}{2} + 3$

Serie 4.

1. a) $y = 50x + 80$

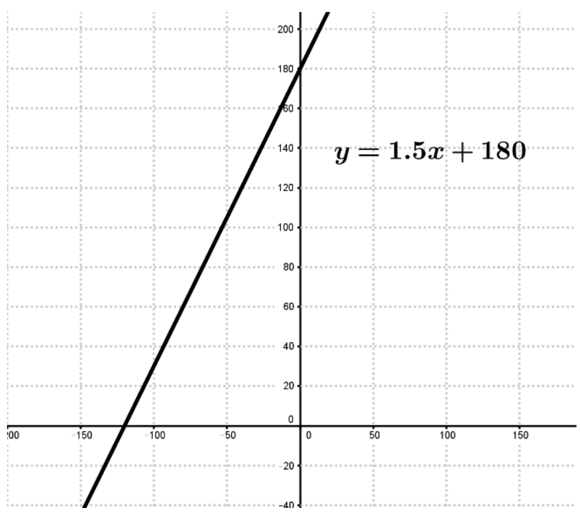
   b) Por vender 15 pólizas su sueldo es de $830.

   c) Vendió 11 pólizas.

2. a) $y = 1.5x + 180$

   b) $y = \$210$

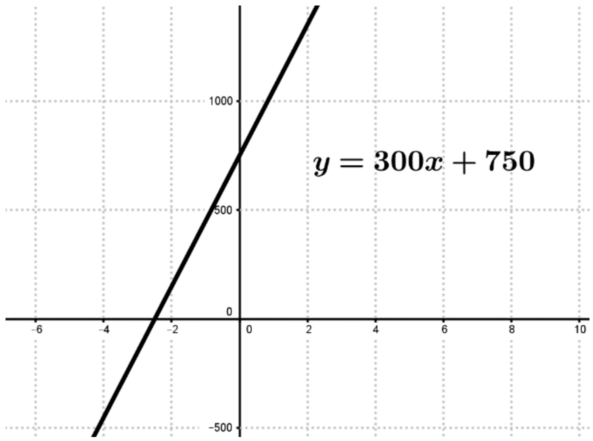
   c)



3. a) $y = 300x + 750$

   b) Necesitará vender 32 enciclopedias infantiles.

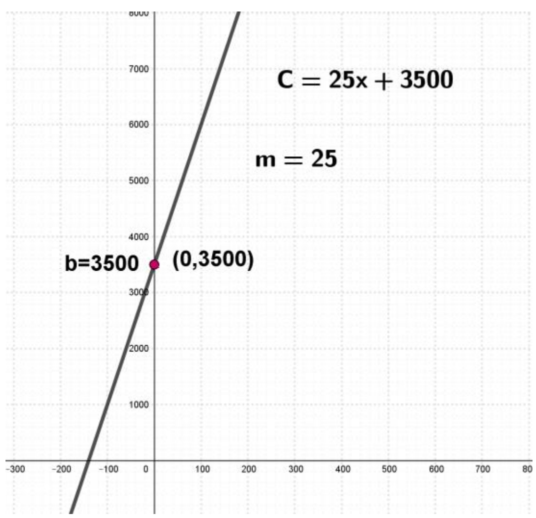
c)



4. a) El costo de producción es de 4000 dólares.

b) La intercepción en el eje “y” es el valor de la ordenada al origen que corresponde a $b = 3500$ es decir (0,3500)

c)

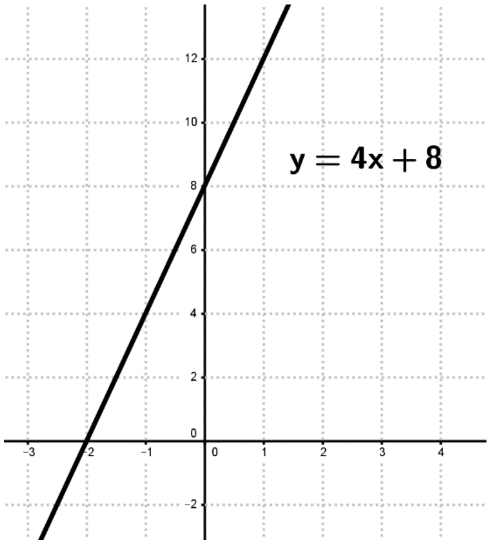


5. a) $y = 4x + 8$

b) Pagará $148.

c) Si paga $208 es porque recorrió 50 km.

d)



MATEMÁTICAS I

UNIDAD 3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Propósito:

Al finalizar la unidad el alumno será capaz de modelar y resolver situaciones problemáticas que conduzcan a una ecuación de primer grado con una incógnita, esto lo hará manipulando algebraicamente el modelo, con la finalidad de que la representación algebraica sea una herramienta en la resolución de tales situaciones.

Aprendizajes:

Con relación a los conocimientos habilidades y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas: El lenguaje algebraico como representación de la generalidad.

- El alumno comprenderá el concepto de “ecuación” en el contexto de la resolución de problemas y lo expresará en el lenguaje algebraico.

El álgebra como sistema simbólico y abstracto que se utiliza para la resolución de problemas.

- Una vez expresada algebraicamente la condición que satisface la incógnita en un problema, el alumno será capaz de utilizarla para resolverlo, empleando las reglas de transposición o las propiedades de la igualdad.

ECUACIONES LINEALES.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que, una vez simplificada, contiene solamente una incógnita con exponente unidad.

Por ejemplo:

$$2x + 5 = 9$$

Es una ecuación de primer grado con una incógnita.

Sin embargo: $x^2 + 5 = 9$ y $\frac{2}{x} + x = 3$ no lo son.

Para resolver ecuaciones lineales podemos ocupar las operaciones inversas, es decir:

Como la adición y la sustracción son operaciones inversas:

- Emplear la sustracción para deshacer la adición.
- Emplear la adición para deshacer la sustracción.

Como la división y la multiplicación son operaciones inversas:

- Emplear la división para deshacer la multiplicación.
- Emplear la multiplicación para deshacer la división.

Propiedad de transposición.

Para transponer un término de un miembro a otro de una ecuación se debe de cambiar su signo. La regla de transposición de basa en el hecho de que un término, que está sumando o restando, puede ser eliminado de un miembro de una ecuación si se suma su opuesto al otro miembro.

Ejemplos de ecuaciones lineales.

Da la solución para cada una de las siguientes ecuaciones lineales:

a) $x + 4 = 3$
Solución:

$$x + 4 = 3$$
$$x = 3 - 4$$
$$x = -1$$

b) $2(x - 7) = -6$
Solución:

$$2(x - 7) = -6$$
$$2x - 14 = -6$$
$$2x = -6 + 14$$

$$2x = 8$$
$$x = \frac{8}{2}$$
$$x = 4$$

c) $3(2x - 6) = 2(x - 5)$
Solución:

$$3(2x - 6) = 2(x - 5)$$
$$6x - 18 = 2x - 10$$
$$6x - 2x = -10 + 18$$
$$4x = 8$$
$$x = \frac{8}{4}$$
$$x = 2$$

d) $2(x + 5) = x + 7$
Solución:

$$2(x + 5) = x + 7$$
$$2x + 10 = x + 7$$
$$2x - x = 7 - 10$$
$$x = -3$$

e) $15(2x - 4) + 20 = -58 - 2(x + 7)$
Solución:

$$15(2x - 4) + 20 = -58 - 2(x + 7)$$
$$30x - 60 + 20 = -58 - 2x - 14$$
$$30x + 2x = -58 + 60 - 20 - 14$$
$$32x = -32$$
$$x = \frac{-32}{32}$$
$$x = -1$$

f) $\frac{3x}{4} = 15$

Solución:

$$\frac{3x}{4} = 15$$
$$3x = 15(4)$$
$$x = \frac{60}{3}$$
$$x = 20$$

g) $\frac{7x}{2} - 3 = 11$

Solución:

$$\frac{7x}{2} - 3 = 11$$
$$2\left(\frac{7x}{2}\right) - 3(2) = 2(11) \qquad mcm = 2$$
$$7x - 6 = 22$$
$$7x = 22 + 6$$
$$x = \frac{28}{7}$$
$$x = 4$$

h) $\frac{6x}{5} - \frac{x}{5} = -6$

Solución:

$$\frac{6x}{5} - \frac{x}{5} = -6$$
$$\frac{5x}{5} = -6$$
$$x = -6$$

i) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 7$

Solución:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 7$$
$$\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 7\right)6 \quad mcm = 6$$
$$6\left(\frac{x}{2}\right) - 6\left(\frac{x}{3}\right) = 6(7)$$
$$3x - 2x = 42 \qquad\qquad x = 42$$

LENGUAJE ALGEBRAICO

El uso de los símbolos para simplificar el lenguaje es de gran importancia en las matemáticas. El álgebra es la parte de las matemáticas que trata del cálculo de cantidades representándolas por medio de letras. Las letras o literales se utilizan para representar números y cantidades cualesquiera.

Para poder utilizar correctamente el lenguaje algebraico, lo primero que hay que hacer es definir y comparar los siguientes términos:

Variable: ____

____

Constante: ____

____

Incógnita: ____

____

Literal: ____

____

En algebra es muy importante saber expresar las proposiciones verbales comunes en proposiciones con lenguaje algebraico.

Una vez definidos cada uno de los conceptos anteriores, también es importante conocer que algunas palabras utilizadas en el lenguaje algebraico significan lo mismo y se escriben de manera diferente, por lo tanto, en los siguientes recuadros escribe las palabras que sean sinónimos de las operaciones indicadas:

Suma	Resta	Multiplicación	División

Antes de entrar de lleno al planteamiento de problemas, realiza la siguiente actividad, la cual consiste en plantear de manera algebraica el enunciado verbal y plantear de manera verbal la expresión algebraica.

Expresión verbal.	Expresión algebraica.
La suma de dos números.	
La diferencia de dos números.	
El producto de dos números.	
El producto de tres números disminuido en cinco unidades.	
El triple de un número.	
El cociente de dos números.	
El cociente de la diferencia de dos números entre otro número.	
La suma de dos números dividida entre su diferencia.	
El cubo de un número disminuido en 6 unidades.	
El triple del cuadrado de un número.	
El cuadrado de la diferencia de dos números.	
La diferencia de los cuadrados de dos números.	
La mitad del cuadrado de un número.	

En el siguiente cuadro, escribe la expresión verbal que represente la expresión algebraica propuesta.

Expresión algebraica.	Expresión verbal.
$2a + b$	
abc	
$a - (b + c)$	
$3(a - b)$	
$(a + b)(a - b)$	
$\frac{a + b}{10}$	
$\frac{ab}{a + b}$	
$\frac{(a + b)(a - b)}{ab}$	
$3a^2$	
$a^3 - b^3$	
$2(x^3 + y^3)$	
$(x + y)^3$	
$3(x - y)^2$	

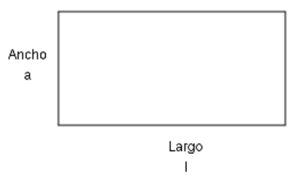
PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Ejemplo 1:

El largo de un terreno de forma rectangular mide el doble de su ancho más tres metros. Si el perímetro mide 5010 metros, hallar las dimensiones del terreno.

Solución:

Recordamos que los lados opuestos del rectángulo son iguales y que el perímetro de la figura se obtiene sumando la medida de los cuatro lados.



Si a representa el ancho del rectángulo, entonces el largo se expresa $l = 2a + 3$.

Por lo tanto, para obtener el perímetro se tiene:

$$a + (2a + 3) + a + (2a + 3) = 5010$$

Agrupando términos semejantes obtenemos:

$$6a + 6 = 5010$$

Despejando el valor de a nos queda:

$$6a = 5010 - 6$$

$$a = \frac{5004}{6}$$

$$a = 834$$

Una vez obtenido el valor de a, entonces podemos determinar que el ancho del terreno es:

$$ancho = 834\ m$$

Y el largo sustituyendo el valor de a, quedando de la siguiente manera:

$$largo = 2a + 3$$

$largo = 2(834) + 3,$ $\quad largo = 1671\ m$

Ejemplo 2:

Para escribir a computadora un informe de investigación se distribuye el trabajo entre tres estudiantes, A, B y C. El estudiante A escribió n cantidad de cuartillas, el estudiante B escribió el triple que A y el estudiante C escribió 6 cuartillas más que el doble de A. si el informe se escribió en 510 cuartillas, ¿Cuántas cuartillas escribió cada estudiante?

Solución:

El trabajo realizado por los estudiantes se puede representar de la siguiente manera:

$$Estudiante\ A : n$$

$$Estudiante\ B : 3n$$

$$Estudiante\ C : 2n + 6$$

De tal manera que:

$$A + B + C = 510$$

Sustituyendo:

$$n + 3n + 2n + 6 = 510$$

$$6n = 510 - 6$$

$$n = \frac{504}{6}$$

$$n = 84$$

Por lo tanto, podemos decir que cada estudiante escribió:

$$Estudiante\ A : 84\ cuartillas$$

$$Estudiante\ B : 252\ cuartillas$$

$$Estudiante\ C : 174\ cuartillas$$

Ejemplo 3:

Encontrar tres números pares consecutivos cuya suma sea 102.

Solución:

Recuerda, la forma de representar un número par es $x = 2n$

Por lo tanto, podemos establecer lo siguiente:

Primer número par: $2n$

Segundo número par: $2(n+1)$

Tercer número par: $2(n+2)$

Por lo tanto, retomando el enunciado del problema se tiene:

$$2n + 2(n+1) + 2(n+2) = 102$$

Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$2n + 2(n+1) + 2(n+2) = 102$$

$$2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 102$$

$$6n + 6 = 102$$

$$6n = 102 - 6$$

$$6n = 96$$

$$n = \frac{96}{6}$$

$$n = 16$$

Con el resultado obtenido podemos darle solución al problema, se tiene entonces:

Primer número par: $2n = 2(16) = 32$

Segundo número par: $2(n+1) = 2(16+1) = 2(17) = 34$

Tercer número par: $2(n+2) = 2(16+2) = 2(18) = 36$

Ejemplo 4:

La edad de Marco es la mitad de la edad de Juan, la edad de José es el triple de la edad de Marco y la edad de Oscar es el doble de la edad de José. Si se suman las cuatro edades suman 132 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Solución.

Llamaremos x a la edad de Marco, por lo tanto. tenemos:

Edad de Marco: x

Edad de Juan: 2x

Edad de José: 3x

Edad de Oscar: 2(3x)

Como la suma de todas las edades es de 132 años podemos establecer que:

$$x + 2x + 3x + 2(3x) = 132$$

Resolviendo la ecuación se tiene que:

$$x + 2x + 3x + 6x = 132$$

$$12x = 132$$

$$x = \frac{132}{12}$$

$$x = 11$$

Una vez determinado el valor de x, podemos entonces darle solución al problema calculando cada una de las edades:

Edad de Marco: $x = 11$ años

Edad de Juan: $2x = 2(11) = 22$ años

Edad de José: $3x = 3(11) = 33$ años

Edad de Oscar: $2\big(3(11)\big) = 2(33) = 66$ años

Ejemplo 5:

Hallar tres números consecutivos tales que, si el menor se divide entre 20, el mediano entre 27 y el mayor entre 41, la suma de los cocientes es igual a 9.

Solución:

Llamaremos x al primero de los números, como el problema dice que los números son consecutivos, entonces los tres números quedarían de la siguiente manera:

Número menor: x

Numero mediano: x+1

Número mayor: x+2

Una vez que determinamos los números, utilizamos las condiciones del problema y podemos establecer:

$$\frac{x}{20} + \frac{x+1}{27} + \frac{x+2}{41} = 9$$

Resolviendo:

$$\left(\frac{x}{20} + \frac{x+1}{27} + \frac{x+2}{41} = 9\right)20$$

$$\left(x+\frac{20(x+1)}{27}+\frac{20(x+2)}{41}=180\right)27$$

$$\left(27x+20(x+1)+\frac{540(x+2)}{41}=4860\right)41$$

$$1107x+820(x+1)+540(x+2)=199260$$

$$1107x+820x+820+540x+1080=199260$$

$$1107x+820x+540x=199260-820-1080$$

$$2467x=199520$$

$$x=\frac{197360}{2467}$$

$$x=80$$

Por lo tanto, los números son: Menor = 80, Mediano = 81, Mayor = 82

Ejemplo 6:

Juan tiene 12 monedas más que Jorge y entre ambos tienen 78. Determine cuantas monedas tiene cada uno.

Solución.

Llamaremos x al número de monedas que tiene Jorge.

El problema establece que juan tiene 12 monedas más que Jorge, por lo tanto, podemos establecer que Juan tiene $(x+12)$ monedas.

Por lo tanto, la ecuación que representa el problema quedaría de la siguiente manera:

$$x+(x+12)=78$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$2x+12=78$$

$$2x=78-12$$

$$2x=66$$

$$x=\frac{66}{2}$$

$$x=33$$

Ejemplo 7:

Hallar dos números cuya suma sea 105, sabiendo que el mayor es el séxtuplo del menor.

Solución.

Sea x el número menor.

El problema establece que el mayor es el séxtuplo del menor, por lo tanto, el número mayor quedaría representado por 6x.

La ecuación que representa el problema quedaría:

$$x + 6x = 105$$

Resolviendo la ecuación se tiene:

$$7x = 105$$

$$x = \frac{105}{7} = 15$$

Por lo tanto, el número menor es 15 y el número mayor (6)(15) = 90

Ejemplo 8:

¿Cuántos kilogramos de dulce, cuyo precio es de $1000 pesos cada uno debe mezclarse con 6 kilogramos de otro dulce que vale $750 pesos, para vender la mezcla al precio de $900 pesos por kilogramo?

Solución

Llamaremos x al número de kilogramos de dulce que cuesta $1000 el kilo, por lo tanto, lo que cuestan esos kilogramos lo representamos como:

$$\$1000x$$

Lo que cuestan 6 kilogramos de dulce a $750 el kilo lo representaremos como:

$$\$750(6)$$

La suma de ese dinero debe de ser igual a lo que cuestan los kilogramos totales $(6 + x)$ de la mezcla resultante:

$$1000x + 750(6) = 900(6 + x)$$

Resolviendo la ecuación resultante tenemos:

$$1000x + 4500 = 5400 + 900x$$

$$1000x - 900x = 5400 - 4500$$

$$100x = 900$$

$$x = \frac{900}{100}$$

$$\boldsymbol{x = 9}$$

Por lo tanto, el número de kilogramos necesario es de 9.

Serie 1

Problemas de aplicación

1.- El doble de un número es igual a cinco veces dicho número menos 81. Hallar el número en cuestión.

2.- Tres veces un número disminuido en 8 es igual a dicho número aumentado en 12. Hallar dicho número.

3.- La suma de tres números, representados por: n, $n-4$ y $3n+7$ es igual a -2, Hallar los números correspondientes.

4.- Un comerciante obtiene sus ganancias en dólares de tres mercancías representadas por: p, $p-3$ y $2p-4$, si la ganancia total es de un dólar, hallar la ganancia en cada una de ellas.

5.- Hallar un número si dos veces la suma del número y 4 es igual al número más 11.

6.- Hallar un número tal que tres veces la suma del número y 2 sea igual a cuatro veces el número disminuido en 3.

7.- Hallar un número si 25 menos 3 veces el número es igual a 8 veces la diferencia que se obtiene cuando se resta el número de la unidad.

8.- Tres muchachos ganan en total $60. Enrique gano $2 menos que Eduardo, y Joaquín gano dos veces más que Enrique. Hallar lo que gano cada uno.

9.- Cuatro veces un número aumentado en 45 es igual a siete veces dicho número. Hallar el número.

10.- Diez veces un número disminuido en 7 es igual a 8 veces el número aumentado en 21. Hallar dicho número.

Serie 2

Resuelve las siguientes ecuaciones y compara con los resultados.

a) $5x + 12 = 17$
b) $3y + y + 70 = 11y$
c) $5x - 2 = 2x + 22$
d) $\frac{2}{3}x - 3 = 7$
e) $\frac{3}{4}y - 14 = -13 - 10$
f) $2y - 28 = 42 - 5y$
g) $8 + 2(x - 5) = 14$
h) $-18 = 10 - 2(3 - x)$
i) $\frac{x}{3} + 5 = 2x$
j) $\frac{x}{5} + 6 = \frac{7x}{5}$
k) $10 = \frac{5x}{2x-3}$
l) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 20$
m) $\frac{x-2}{3} - \frac{x+1}{4} = 4$
n) $\frac{y-3}{5} - 1 = \frac{y-5}{4}$
o) $\frac{4}{x-4} = \frac{7}{x+2}$

Serie 1

1. $R = 27$
2. $R = 10$
3. $n = -1$
4. $p = 2$
5. $R = 3$
6. $R = 9$
7. $R = 3$
8. $R: Enrique = \$14.50, Eduardo = \$16.50, Joaquin = \$29$
9. $R = 15$
10. $R = 14$

Serie 2

a) $x = 3$
b) $y = 10$
c) $x = 8$
d) $x = 15$
e) $y = -12$
f) $y = 10$
g) $x = 8$
h) $x = -11$

i) $x = 3$
j) $x = 5$
k) $x = 2$
l) $x = 24$
m) $x = 59$
n) $y = -7$
o) $x = 12$

Matemáticas I

Unidad IV Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y 3x3.

Propósito:

Al finalizar, el alumno: Será capaz de modelar y resolver situaciones. problemáticas que conduzcan a sistemas de ecuaciones lineales de orden 2x2 y 3x3, a fin de que se avance en la utilización de la representación algebraica como un sistema de símbolos útiles en la resolución de tales situaciones

Aprendizajes:

- El alumno a partir de un problema que potencialmente lleve a una ecuación con dos variables aplica una infinidad de soluciones que satisfacen la condición.
- Grafica las soluciones a un problema con dos variables e identifica el patrón geométrico que siguen las representaciones gráficas de las soluciones y su utilidad.
- Expresa algebraicamente las coordenadas de las soluciones a un problema con dos variables y una sola condición.
- El alumno resuelve gráficamente un problema que potencialmente lleve a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, aplicando la heurística de tratar cada una de las condiciones por separado.
- Resuelve algebraicamente problemas que lleven a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.

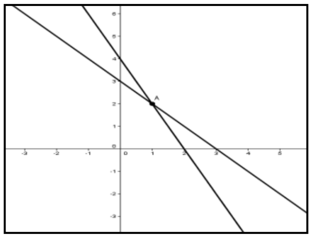
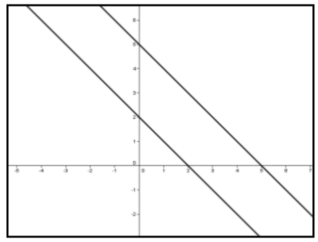
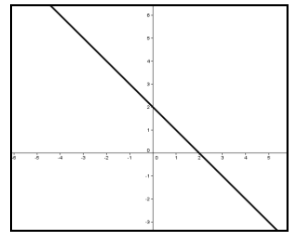
Resolver sistemas de ecuaciones con dos variables significa encontrar valores para las variables (x) y (y), para ecuaciones de tipo

$$ax + by = h$$

$$cx + dy = k$$

donde **a, b, d, h y k** son constantes reales. El conjunto de soluciones de este sistema es el conjunto de todos los pares ordenados de números tales que cada uno de estos satisface ambas ecuaciones en el sistema.

En los sistemas encontrarás tres clasificaciones:

		
Consistente e independiente: Las gráficas de las ecuaciones se cruzan en un punto, cuyas coordenadas proporcionan la solución del sistema. (Una solución).	**Inconsistente:** Las gráficas de las ecuaciones son líneas paralelas. (No tiene solución).	**Dependiente:** Las gráficas de la ecuación coinciden (son las mismas). El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones contamos con cuatro métodos: Método de Sustitución, Método de Igualación, Método de Suma y Resta y Método Gráfico.

Método de suma y resta. (pasos para resolver por este método)

1. Ordenar el sistema.
2. Enumerar las ecuaciones.
3. Elegir una de las incógnitas a eliminar mediante una suma o una resta.
4. Realizar las operaciones pertinentes para lograr que se elimine la incógnita elegida.
5. Una vez eliminada la incógnita elegida, resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.
6. Obtener el valor de la otra incógnita con una de las ecuaciones originales.
7. Comprobar los resultados

Método de sustitución (pasos para resolver el sistema)

1. Ordenar el sistema.
2. Enumerar las ecuaciones.
3. Elegir una incógnita de una de las ecuaciones y despejarla (dejarla sola).
4. Sustituir el despeje realizado en la otra ecuación.
5. Resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.
6. Obtener el valor de la otra incógnita.
7. Comprobar los resultados

Método de igualación (pasos para resolver el sistema)

1. Ordenar el sistema.
2. Enumerar las ecuaciones.
3. Elegir una incógnita de ambas ecuaciones y despejarlas.
4. Igualar los despejes anteriores.
5. Resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.
6. Obtener el valor de la otra incógnita con cualquiera de los despejes realizados en el paso 3.
7. Comprobar los resultados

Método gráfico (pasos para resolver el sistema)

1. Ordenar el sistema.
2. Enumerar las ecuaciones.
3. Despeja de las ecuaciones la misma variable.
   Sustituimos valores en la ecuación.
   Obtenemos la tabla de valores.
4. Localizamos los puntos en el plano cartesiano.

Método de eliminación por suma y resta

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema

$$5x + y = 38$$

$$3x = 32 + 4y$$

1.-Ordenar el sistema. 2.-Enumerar las ecuaciones.	Restamos $4y$ en ambos lados de la segunda ecuación. $3x = 32 + 4y$ $3x - 4y = 32 + 4y - 4y$ $3x - 4y = 32$ $5x + y = 38 \quad (1$ $3x - 4y = 32 \quad (2$
3.-Elegir una de las incógnitas a eliminar mediante una suma o una resta.	Se elegirá eliminar a y por tener un signo menos y así poder utilizar la suma. Multiplicaremos la ecuación (1) por 4

4.-Realizar las operaciones pertinentes para lograr que se elimine la incógnita elegida.	(4) $5x + y = 38$ $3x - 4y = 32$ $20x + 4y = 152$ $3x - 4y = 32$ $23x \quad = 184$
5.-Una vez eliminada la incógnita elegida, resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.	Dividiremos entre 23 a toda la ecuación. $\frac{23x}{23} = \frac{184}{23}$ $x = 8$ Como $x = 8$ la sustituimos en la ecuación $5x + y = 38$ $5(8) + y = 38$ $40 + y = 38$
6.-Obtener el valor de la otra incógnita con una de las ecuaciones originales.	Restamos 40 en ambos lados de la ecuación. $40 - 40 + y = 38 - 40$ $y = -2$ Para comprobar sustituimos los valores de $x = 8$, $y = -2$ en ambas ecuaciones
7.-Comprobar los resultados.	$5x + y = 38$ $5(8) + (-2) = 38$ $40 - 2 = 38$ $38 = 38$ Ecuación (2) $3x - 4y = 32$ $3(8) - 4(-2) = 32$ $24 + 8 = 32$ $32 = 32$

La solución del sistema es la $x = 8$, $y = -2$

Serie 1

Se sugiere esta serie de ejercicios para el alumno con el cual podrá practicar el método de eliminación por suma o resta.

1. Entre mi abuelo y mi hermano tienen 56 años. Si mi abuelo tiene 50 años más que mi hermano, ¿qué edad tienen cada uno?

2. Un grupo de amigos conformado por cuatro adultos y cuatro niños pagan \$300.00 por entrar al parque. Otro grupo con seis adultos y un niño van al mismo parque y pagan \$250.00. ¿Cuánto cuestan las entradas del adulto y cuánto las de niños?
3. Tengo 30 monedas. Unas son de cinco pesos. y otras de un peso. ¿Puedo tener en total \$78?
4. La señora de la tienda compró bolsas de paletas a \$65.00 cada una y bolsas de bombones a \$40.00 cada una. Si en total gastó \$855.00 y tiene en total de 17 bolsas, ¿cuántas bolsas de cada tipo compró?
5. Halla dos números tales que si se dividen el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15; mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 17.

6.- $2x + y = 44$ $6x + 2y = 124$	7.- $x = y + 21$ $2x + 10 = y + 5$	8.- $x + y = 30$ $20x + 30y = 8000$
9.- $x + y = 36$ $x - y = 4$	10.- $x + y = 2$ $x + y = 3$	

Ejemplo 2:

Método de sustitución.

$$3x - y = 11$$
$$6x - 5y = 10$$

1.-Ordenar el sistema.	En nuestro caso ya está ordenado. $3x - y = 11$ $6x - 5y = 10$
2.-Enumerar las ecuaciones.	Nos queda: $3x - y = 11 \qquad (1$ $6x - 5y = 10 \qquad (2$
3.-Elegir una incógnita de una de las ecuaciones y despejarla.	De la ecuación (1) despejamos la variable y . $3x - y = 11$

4.-Sustituir el despeje realizado en la otra ecuación.	Restamos $3x$ a ambos lados de la igualdad. $$3x-3x-y=11-3x$$ $$-y=11-3x$$ Multiplicamos por (-1) a la ecuación. (1 $$(-1)(-y)=(11-3x)(-1)$$ $$y=-11+3x$$ En la ecuación $(2$ sustituimos en donde esta $y=-11+3x$.
5.-Resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.	$$6x-5y=10$$ $$6x-5(-11+3x)=10$$ $$6x+55-15x=10$$ $$6x+55-15x=10$$ $$-9x+55=10$$ Se restan 55 en ambos lados de la ecuación. $$-9x+55-55=10-55$$ $$-9x=10-55$$ $$-9x=-45$$
6.-Obtener el valor de la otra incógnita.	Dividimos entre -9 a ambos lados de la ecuación. $$\frac{-9x}{-9}=\frac{-45}{-9}$$ $$x=5$$ Sustituyendo el valor de $x=5$ en una de la ecuación. $(1$ $$3x-y=11$$ $$3(5)-y=11$$ $$15-y=11$$ Restemos 15 a ambos lados de la ecuación. $$15-15-y=11-15$$ $$-y=11-15$$ Multiplicamos por (-1) a la ecuación $$-y=-4$$ $$(-1)(-y)=(-1)(-4)$$ $$y=4$$
7.-Comprobar los resultados	Sustituimos los valores de $x=5$ y $y=4$ en las ecuaciones $(1$ y $(2$. $$3x-y=11$$ $$3(5)-(4)=11$$ $$15-4=11$$ $$11=11$$ En la segunda

	$6x - 5y = 10$ $6(5) - 5(4) = 10$ $30 - 20 = 10$ $10 = 10$

La solución del sistema es $x = 5$ y $y = 4$

Serie 2

Se sugiere esta serie de ejercicios para el alumno con el cual podrá practicar el método de sustitución

1. En el CCH Naucalpan se creó un cine club en el cual los boletos con descuento para los alumnos son $10.00 y para los maestros es a $15.00. Si en una función se recaudaron $875.00 encontrar el número de boletos de cada precio que se vendieron, si se sabe que asistieron 75 personas.
2. La suma de dos números enteros positivos es 36 y su diferencia de 4. Encontrar el valor de los números.
3. En mi clase están 35 alumnos. Nos han regalado por nuestro buen comportamiento 2 bolígrafos a cada chica y un cuaderno a cada chico. Si en total han sido 55 regalos, ¿cuántos chicos y chicas están en mi clase?
4. Carlos compro dos kilogramos de café de grano y tres kilogramos de arroz por $57 pesos. A los mismos precios Lorena compra cinco kilogramos de café de grano y dos kilogramos de arroz y le cobran $82. ¿Cuánto les costó el kilogramo de café de grano y cuánto el kg de arroz?
5. En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas, son 50, si las patas, son 134. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

6.- $9c + 3d = -48$ $4c - 6d = -58$	7.- $a - b = 11$ $51a - 73b = -121$	8.- $-15x - 8y = -96$ $27x + y = 12$
9.- $x + y = 2$ $2x + 2y = 4$	10.- $9a - 8b = -6$ $23a + 11b = 79$	

El profesor guiará a los alumnos para el planteamiento de problemas.

Ejemplo 3:

Se tienen $120 en 33 monedas de $5 Y $2 pesos. ¿Cuántas monedas hay $5 Y *$2 pesos?*

¿Cuáles son los datos con los que contamos?

____

¿Qué es lo que conocemos del problema? ________________________________

____

Conoces la denominación de las monedas de $______ y $______ y el total económico de las monedas es $_____.

El total de monedas es ______. Conocemos el # de monedas en cantidad de cada una de las monedas _________. Asignaremos a cada una de las variables una literal.

Llamaremos x al # de monedas de $5 pesos.

Llamaremos y al # de monedas de $2 pesos.

Sabemos que hay $120 pesos en monedas de $5 y de $2 pesos. Cuál sería la expresión que representa el enunciado:

Ahora, se sabe que el número total de monedas es de 33 monedas. Cuál sería la expresión que representa el enunciado:

De las expresiones anteriores, puedes darte cuenta de que se trata de 2 ecuaciones con dos incógnitas, las cuales integran un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Método de igualación.

1.-Ordenar el sistema. En nuestro caso ya está ordenado. 2.-Enumerar las ecuaciones.	$x+y=33$ $5x+2y=120$ $x+y=33 \ldots\ldots(1$ $5x+2y=120 \ldots(2$

3.-Elegir una incógnita de ambas ecuaciones y despejarlas	Despejando la variable y de la ecuación (1) $$x + y = 33$$ Restando a x de ambos lados de la igualdad. $$x - x + y = 33 - x$$ $$y = 33 - x \ldots\ldots (3$$ Despejando la variable y de la ecuación (2). $$5x + 2y = 120$$ Restando de ambos lados de la igualdad $5x$. $$5x - 5x + 2y = 120 - 5x$$ $$2y = 120 - 5x$$ Dividiendo entre 2 a ambos lados de la igualdad. $$\frac{2y}{2} = \frac{120 - 5x}{2}$$ $$y = \frac{120 - 5x}{2} \qquad (4$$
4.-Igualar los despejes anteriores.	Igualando la ecuación $(3$ y $(4$ $$\frac{120 - 5x}{2} = 33 - x$$
5.-Resolver la ecuación lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.	Multiplicamos por 2 a toda la ecuación. $$2\left[\frac{120 - 5x}{2}\right] = 2[33 - x]$$ $$120 - 5x = 66 - 2x$$ A la ecuación se le suma $2x$ de ambos lados de la igualdad. $$120 - 5x + 2x = 66 - 2x + 2x$$ $$120 - 3x = 66$$ Restamos 120 de ambos lados de la ecuación. $$120 - 120 - 3x = 66 - 120$$ $$-3x = -54$$
6.-Obtener el valor de la otra incógnita con cualquiera de los despejes realizados en el paso 3.	Dividimos -3 a la ecuación. $$\frac{-3x}{-3} = \frac{-54}{-3}$$ $$x = 18$$ Sustituyendo en la ecuación $(3$ el valor de $x = 18$
7.-Comprobar los resultados	

	$y = 33 - x$ $y = 33 - 18$ $y = 15$ En la primera ecuación. Sustituye los valores de $x = 18$ y $y = 15$. $x + y = 33$ $18 + 15 = 33$ $33 = 33$ En la segunda ecuación. Sustituye los valores de $x = 18$ y $y = 15$. $5x + 2y = 120$ $5(18) + 2(15) = 120$ $90 + 30 = 120$ $120 = 120$

La solución del problema es que tiene 18 monedas de $5 pesos y tiene 15 monedas de $2 pesos.

Serie 3

Se sugiere esta serie de ejercicios para el alumno con el cual podrá practicar el método de igualación.

1) Por 5 plumas y 3 colores se pagaron 136 unidades de dinero, y por 3 plumas y 4 colores se pagaron 108 unidades de dinero. Hallar el valor de cada pluma y de cada color.
2) El día del estreno de una película se vendieron 600 entradas y se recaudaron $196,250. Si los adultos pagaban $400. y los niños $150. ¿Cuál es el número de adultos y niños que acudieron?
3) En la granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?
4) Una caja contiene dos tipos de galletas; las de nuez pesan 6 g y las de chocolate 3 g. Si en total la caja tiene 450 g en 90 piezas, ¿Cuántas galletas hay de cada tipo?

La suma de dos números es 25 y su diferencia es 9. ¿Qué número son?

6.- $3x + 4y = 1$ $2x + 3y = -1$	7.- $6x + 4y = 10$ $12x + 8y = 20$	8.- $x - y = 0$ $3x + 2y = 5$
9.- $2x + 6y = 5$ $7x - y = 1$	10.- $x + 3y = 0$ $2x - y = 7$	

Método gráfico.

Uno de los métodos a utilizar es el método gráfico y existen muchas formas de utilizarlo en el material trabajaremos una de ellas.

Ejemplo 4
Dado el siguiente sistema de ecuaciones resolver por el método gráfico

$$x + y = -5$$
$$x = y + 1$$

1.-Ordenar el sistema.	La segunda la ordenaremos restando y en la ecuación $x - y = y - y + 1$ $x - y = 1$
2.-Enumerar las ecuaciones	$x + y = -5 \ldots\ldots(1$ $x - y = 1 \ldots\ldots\ldots(2$
3.-Despeja de las ecuaciones la misma variable en nuestro caso será y.	De la ecuación (1 restaremos x de ambos lados de la ecuación. $x + y = -5$ $x - x + y = -5 - x$ $y = -5 - x \ldots\ldots\ldots(3$ Una vez que tenemos la ecuación $y = -5 - x$
Sustituimos valores en la ecuación.	Daremos 3 valores cualquiera, nosotros tomaremos por ejemplo el -5,2 y 0 esos serán los valore que le asignaremos a la variable x y los sustituimos en la ecuación (3 para encontrar los valores de la variable y. Cuando $x = 2$ $y = -5 - x$ $y = -5 - 2$ $y = -7$ Cuando $x = 0$ $y = -5 - x$

$$y = -5 - 0$$
$$y = -5$$

Cuando $x = -5$

$$y = -5 - x$$
$$y = -5 - (-5)$$
$$y = 0$$

Obtenemos la tabla de valores

x	y
2	-7
0	-5
-5	0

De la ecuación (2 restaremos x de ambos lados de la ecuación.

$$x - y = 1$$
$$x - x - y = 1 - x$$
$$-y = 1 - x$$

La multiplicamos por -1

$$(-1)\,(-y) = (1 - x)(-1)$$
$$y = -1 + x$$

Sustituimos valores en la ecuación.

Daremos 3 valores cualquiera, nosotros tomaremos por ejemplo el -3,1 y -6 esos serán los valores que le asignaremos a la variable x y los sustituimos en la ecuación (3 para encontrar los valores de la variable y.

Cuando $x = 1$

$$y = -1 + x$$
$$y = -1 + 1$$
$$y = 0$$

Cuando $x = -3$

$$y = -1 + x$$
$$y = -1 + (-3)$$
$$y = -4$$

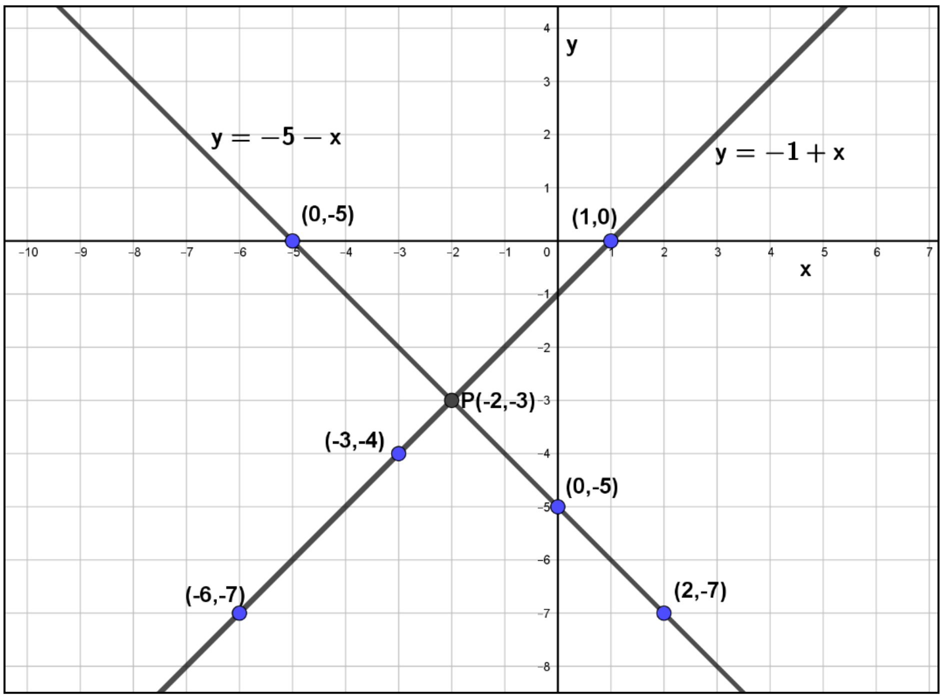
Cuando $x = -6$

$$y = -1 + x$$
$$y = -1 + (-6)$$
$$y = -7$$

Obtenemos la tabla de valores.

x	y
1	0
-3	-4
-6	-7

4.- Localizamos los puntos en el plano cartesiano



El punto donde intersecan las rectas es la solución es decir $x = -2$ y $y = -3$

Serie 4

1) En una lucha entre moscas y arañas intervienen 42 cabezas y 276 patas. ¿Cuántos luchadores había de cada clase? (Recuerda que una mosca tiene 6 patas y una araña 8 patas).
2) En un puesto de verduras se han vendido 2 Kg de naranjas y 5 Kg de patatas por $130. y 4 Kg de naranjas y 2 Kg de patatas por $100. Calcula el precio de los kilogramos de naranja y patata.
3) Hemos comprado 3 canicas de cristal y 2 de acero por $60 y, ayer, 2 de cristal y 5 de acero por $95. Determinar el precio de una canica de cristal y de una de acero.
4) Un avión dispone de 32 asientos en clase A y de 50 asientos en clase B cuya venta supone un total de $14,600. Sin embargo, sólo sea han vendido 10

asientos en clase A y 40 en clase B, obteniendo un total de $7,000. ¿Cuánto cuestan cada boleto?

5) La diferencia de dos números es de 14 y la cuarta parte de su suma es 13. Halla dichos números.

6) $x = y + 21$ $x + 5 = 2y + 10$	7) $5w - 2t = 17$ $8w + 5t = 19$	8) $2x + 3y = 8$ $3x - y = 1$
9) $2x + 5y = 8$ $4x + 10y = 16$	10) $2x + y = 1$ $4x + 2y = 10$	

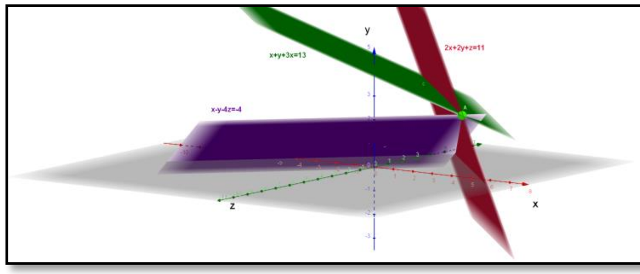
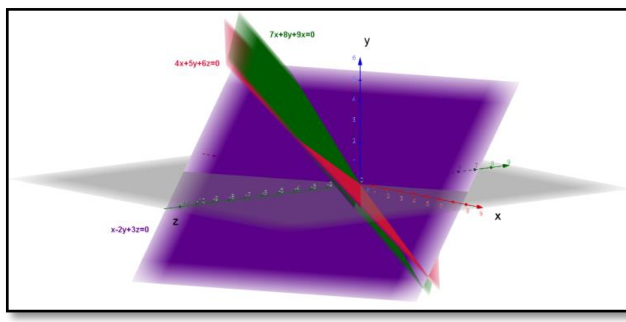
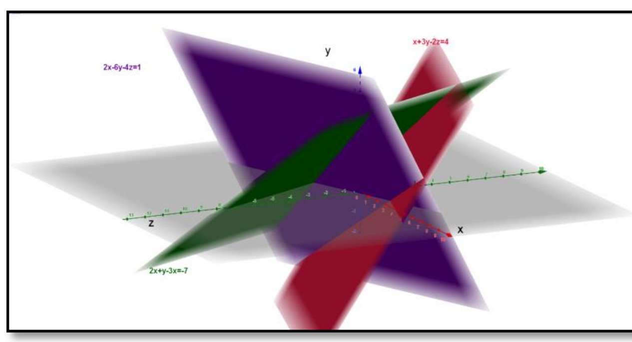
Sistemas de ecuaciones 3x3

Un sistema de 3x3 es un sistema con 3 incógnitas y con 3 ecuaciones. Se llama 3x3 por que se suele usar matrices para resolverlo y se forman 3 filas y 3 columnas (y una cuarta para la solución).

Se dice que la solución de un sistema de ecuaciones 3x3 es la terna de valores (x, y, z) que sea solución de las tres ecuaciones a la vez. Las soluciones de este tipo de sistemas son los puntos de corte de los planos que las representan cada una de las ecuaciones del sistema.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Tipos de sistemas

Sistema compatible determinado una única solución en (x, y, z).	
Sistema compatible indeterminado infinitas soluciones en (x, y, z) .	
Sistema Incompatible No tiene solución	

Recuerda que existen muchos métodos de solución para esta actividad, se trabajará el método de eliminación (o de suma o resta).

Ejemplo 5:

En una tienda, un cliente se ha gastado \$150 ¿en la compra de 12 artículos entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado \$20, cada libro \$15 y cada carpeta \$5. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.

Solución

Se tiene que contestar las siguientes preguntas:

¿Cuáles son las incógnitas?
x =# de discos
y =# de libros
z =# de carpetas

¿Cuáles son los datos?
Gasto total:$\$150$
Número de artículos comprados: 12
El precio de discos $\$20$, libros $\$15$ y carpetas $\$5$
Nos damos cuenta de que es un sistema de ecuaciones 3x3.

Si se requiere hallar una solución, se tienen que plantear por lo menos 3 ecuaciones ya que se tienen 3 incógnitas: el número de libros, carpetas y discos.

La primera a plantear es la del número de artículos y queda:

$$x + y + z = 12$$

La segunda es plantear con respecto al costo de los artículos y está dada por el precio unitario del artículo, el # de artículos y el gasto total.

$$20x + 15y + 5z = 150$$

Por último, plantearemos la ecuación faltante con las condiciones del problema, se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros.

$$x + z = 3y$$

La solución del problema será con el método de eliminación (o de suma o resta).

1.-Ordenar el sistema	Para ordenar la ecuación se estará $3y$ $x + z = 3y$ $x + z - 3y = 3y - 3y$ $x + z - 3y = 0$

<table>
<tr>
<td>2.-Enumerar las ecuaciones</td>
<td>$$x+y+z=12\ldots\ldots(1$$ $$20x+15y+5z=150\ldots.(2$$ $$x+z-3y=0\ldots\ldots.(3$$</td>
</tr>
<tr>
<td>3.-Elegir una de las incógnitas a eliminar mediante una suma o una resta.

En este caso de 3x3 tendremos que eliminar en dos ecuaciones la misma variable</td>
<td>Eliminaremos a la variable y de las ecuaciones para ello el método será por suma el cual pide que ambas ecuaciones tengan el mismo coeficiente, pero de diferente signo.

Para ello la ecuación (1 la multiplicamos por 3.
$$x+y+z=12$$ $$3\ (x+y+z)=(12)(3)$$ $$3x+3y+3z=36\ldots..(4$$
Sumado las ecuaciones (3 y (4 .
$$\begin{array}{r} x-3y+z=0 \\ 3x+3y+3z=36 \\ \hline 4x\qquad +4z=36 \end{array}\ldots(5$$</td>
</tr>
<tr>
<td>4.-Realizar las operaciones pertinentes para lograr que se elimine la incógnita elegida.</td>
<td>Para poder eliminar de la ecuación (2 la variable y, se multiplica la ecuación (1 por -15.
$$x+y+z=12$$ $$-15\ (x+y+z)=(12)(-15)$$ $$-15\,x-15y-15z=-180\ldots\ldots.(6$$
Sumado las ecuaciones (2 y (6.
$$\begin{array}{r} 20x+15y+5z=150 \\ -15\,x-15y-15z=-180 \\ \hline 5x\qquad -10z=-30 \end{array}\ldots(7$$</td>
</tr>
<tr>
<td>5.-Una vez eliminada la incógnita elegida, se resuelve el sistema de ecuaciones lineal resultante y obtener el valor de una de las incógnitas.</td>
<td>$$4x+4z=36\qquad(5$$ $$5x-10z=-30\qquad(7$$
A la ecuación (5 la multiplicamos por 5.
$$4x+4z=36$$ $$(5)(4x+4z)=(36)(5)$$ $$20x+20z=180\qquad(8$$
A la ecuación (7 la multiplicamos por 2.
$$5x-10z=-30$$ $$(2)(5x-10z)=(-30)(2)$$</td>
</tr>
</table>

Obtener el valor de la otra incógnita con una de las ecuaciones originales.	$10x - 20z = -60 \ldots\ldots\ldots\ldots (9$ Sumamos las ecuaciones (8 y (9. $\begin{array}{r} 20x + 20z = 180 \\ 10\,x - 20z = -60 \\ \hline 30x \qquad = 120 \end{array}$ $x = \frac{120}{30} = 4$ Sustituimos el valor de $x = 4$ en la ecuación (5 $4x + 4z = 36$ $4(4) + 4z = 36$ $16 + 4z = 36$ $4z = 36 - 1$ $4z = 20$ $z = \frac{20}{4} = 5$ Sustituyendo el valor de $x = 4$ y $z = 5$ En la ecuación (1 $x + y + z = 12$ $4 + y + 5 = 12$ $y + 9 = 12$ $y = 12 - 9$ $y = 3$
6.- Comprobar los resultados	Sustituyendo el valor de las tres variables $x = 4$, $y = 3$ y $z = 5$ en las tres ecuaciones. La primera ecuación $x + y + z = 12$ $4 + 3 + 5 = 12$ $12 = 12$ La segunda ecuación $20x + 15y + 5z = 150$ $20(4) + 15(3) + 5(5) = 150$ $80 + 45 + 25 = 150$ $150 = 150$

	La tercera ecuación $$x + z - 3y = 0$$ $$4 + 5 - 3(3) = 0$$ $$0 = 0$$

Para finalizar es importante mencionar que el número de discos es de 4 piezas, el número de libros es de 3 piezas y el número de carpetas es de 5 piezas.

Ejemplo 6:

Dado el siguiente sistema resolver por sustitución

$$x - 2y + 3z = 4$$
$$2x + y - 4x = 3$$
$$-3x + 4y - z = -2$$

1.-Ordenar el sistema 2.-Enumerar las ecuaciones 3.-Elegir una incógnita de una de las ecuaciones y despejarla (dejarla sola). 4.-Sustituir el despeje realizado en las otras ecuaciones.	Ya está ordenada $$x - 2y + 3z = 4 \text{.........}(1)$$ $$2x + y - 4z = 3 \ldots\ldots(2)$$ $$-3x + 4y - z = -2 \ldots.(3)$$ Despejando de la ecuación (1) a la variable x $$x - 2y + 3z = 4$$ $$x = 4 + 2y - 3z \qquad (4)$$ Sustituimos el valor de x de la ecuación (4) en la ecuación (2). $$2x + y - 4z = 3$$ $$2(4 + 2y - 3z) + y - 4z = 3$$ $$8 + 4y - 6z + y - 4z = 3$$ $$5y - 10z + 8 = 3$$ $$5y - 10z = 3 - 8$$ $$5y - 10z = -5 \qquad (5)$$ Sustituimos el valor de x de la ecuación (4) en la ecuación (3).

	$$-3x + 4y - z = -2$$ $$-3(4 + 2y - 3z) + 4y - z = -2$$ $$-12 - 6y + 9z + 4y - z = -2$$ $$-12 - 6y + 9z + 4y - z = -2$$ $$-2y + 8z - 12 = -2$$ $$-2y + 8z = -2 + 12$$ $$-2y + 8z = 10 \ldots\ldots (6)$$
5.-Resolver el sistema de ecuaciones lineales.	Solucionando el sistema de ecuaciones $$5y - 10z = -5 \qquad (5)$$ $$-2y + 8z = 10 \qquad (6)$$ Utilizaremos el método de igualación del sistema de 2x2. Despejando la variable z de la ecuación (5). $$5y - 10z = -5$$ $$z = \frac{-5 - 5y}{-10} \qquad (7)$$ Despejando la variable z de la ecuación (6). $$-2y + 8z = 10$$ $$z = \frac{10 + 2y}{8} \qquad (8)$$
Obtener el valor de una de las incógnitas.	Igualando las ecuaciones (7) y (8) $$\frac{-5 - 5y}{-10} = \frac{10 + 2y}{8}$$ Cruzamos los denominadores. $$(8)(-5 - 5y) = (-10)(10 + 2y)$$ Multiplicamos $$-40 - 40y = -100 - 20y$$ Ponemos de un lado las variables y del otro los números.

6.-Obtener el valor de la otra incógnita.	$-40y+20y=-100+40$ $-20y=-60$ $y=\frac{-60}{-20}=3$ $y=3$ Sustituir el valor de $y=3$ en la ecuación (5) $5y-10z=-5$ $5(3)-10z=-5$ $15-10z=-5$ $-10z=-5-15$ $-10z=-20$ $z=\frac{-20}{-10}=2$ $z=2$ Sustituyendo el valor de la variable $y=3$ y $z=2$ en la ecuación (1) $x-2y+3z=4$ $x-2(3)+3(2)=4$ $x-6+6=4$ $x=4$
7.-Comprobar los resultados	Sustituyendo el valor de las variables $x=4$, $y=3$ y $z=2$ en las tres ecuaciones. Para la primera ecuación $x-2y+3z=4$ $4-2(3)+3(2)=4$ $4-6+6=4$ $4=4$ Para la segunda ecuación $2x+y-4z=3$ $2(4)+(3)-4(2)=3$ $8+(3)-8=3$ $3=3$ Para la tercera ecuación $-3x+4y-z=-2$ $-3(4)+4(3)-(2)=-2$

	$-12+12-(2)=-2$ $-2=-2$

La solución del sistema es $x=4$, $y=3$ y $z=2$

Serie 5

1) El dueño de un bar ha comprado refresco, cerveza y vino por el importe de \$500 (sin impuesto). El valor del vino es de \$60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben de pagar de IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuesto sea de \$592.4. Calcula la cantidad invertida en cada tipo de bebida.
2) Un comerciante adquiere dos clases de cacahuates para combinarlos con nueces cuyos costos respectivos son: \$3.00, \$5.00 \$8.00 por kilo para obtener una mezcla de 65 kg que cueste \$6.00 el Kg. ¿Cuántos kilogramos de cada clase deberá utilizar, si además desea que la cantidad de cacahuates de la variedad más barata sea el doble de la variedad más cara?
3) Calcula el área de un triángulo con las siguientes condiciones: Su perímetro es igual a 24cm. El doble de la hipotenusa es igual al doble del cateto menor más el mayor. Seis veces el cateto menor más ocho veces el mayor menos 10 veces la hipotenusa es igual a cero.
4) En una hora en la carretera México Cuernavaca han ingresado 300 vehículos a los autobuses de pasajeros se les cobra \$200.00 a los automóviles \$120.00 y los transportes de carga \$150.00, si los autobuses de pasajeros y de carga son el doble que los automovilistas y en esa hora se ha recovado \$49,500.00. ¿Cuántos vehículos de cada clase han engrasado en esa hora al DF??

5) En un local de comida rápida, una orden de 5 hamburguesas, 2 papas fritas y 3 refrescos cuesta 56 pesos. Una orden de 4 hamburguesas, 3 papas fritas y 2 refrescos cuesta 46 pesos. Una orden de 6 hamburguesas, 4 papas fritas y 3 refrescos cuesta 68 pesos ¿Cuál será el precio de una sola hamburguesa con un refresco?

6.- $6x+4y-3z=5$ $-4x+3y+6z=20$ $4x-10y-5z=-31$	7.- $4x+2y-3z=6$ $x-4y+z=-4$ $-x+2z=2$	8.- $-5x-3y-5=0$ $-8x+8y=-4z$ $-2x-y+2z+2=0$
9.-	10.-	

$4x-2y+z=-4$ $x+3y-2z=7$ $10x-y+z=12$	$x-y-4=0$ $-3x+3y=-4z-4$ $-14x-y+6z+31=0$	

Respuestas a las series de ejercicios

Serie 1

1.- x =La edad del Abuelo y =La edad del hermano $x+y=56$ $x+50=y$ x =53 es la edad de abuelo y = 3 la edad del hermano	2.- x =costo del boleto por adulto y =Costo del boleto por niño. $4x+4y=300$ $6x+y=250$ x =costo por adulto es de $35 y =el costo por niño es de $40	1.- x =·# de monedas de $5 y =·# de monedas de $1 $x+y=30$ $5x+y=78$ x =12 es # de monedad de $5. y =18 es el #de monedas de $1.
4.- x =# de bolsas de paletas y =# de bolsas de bombones $65x+40y=855$ $x+y=17$ x =7 son la bolsa de paletas y = 10 son las bolsas de bombones	5.- x =primer número y =segundo número $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=15$ $2x+5y=17$ $x=\frac{849}{14}$ $y=-\frac{292}{14}$	6.- x =18 y =8
7.- x =-26 y =-47	8.- x =-710 y =740	9.- x =20 y =16
10.- Sistema incompatible o inconsistente. Sin solución.		

Serie 2

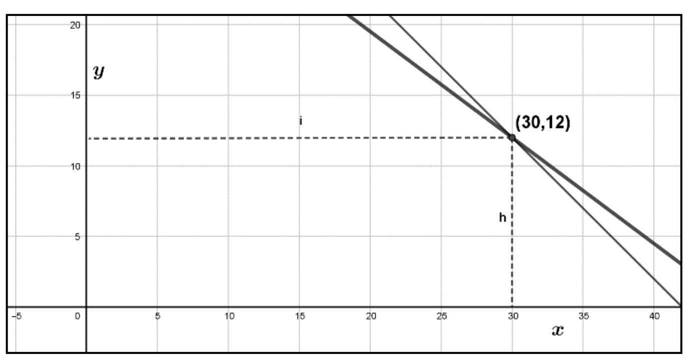
1.- $x =$ # de boletos para alumnos. $y =$ # de boletos para maestros $x + y = 75$ $10x + 15y = 875$ x =50 boletos de alumnos y =25 boletos de maestros	2.- x =primer número y =segundo número $x + y = 36$ $x - y = 4$ $x = 20$ es el primer número y =16 es el segundo número	3.- $x =$ # de chicas. $y =$ # de chicos $2x + y = 55$ $x + y = 35$ $x = 20$ es el # de chicas. $y = 15$ es el # de chicos
4.- $x =$ el \$ del café por kg $y =$ el \$ del arroz por kg, $2x + 3y = 57$ $5x + 2y = 82$ x = \$12 el kg de café. y =\$11 el kg de arroz	5.- $x =$ # de gallinas $y =$ # de conejos $x + y = 50$ $2x + 4y = 134$ $x = 33$ es el # de gallinas $y =$ 17 es el # de conejos	6.- $c = -7$ $d = 5$
7.- $a = 42$ $b = 31$	8.- $x = 0$ $y = 12$	9.- Sistema equivalente o dependiente. Múltiples soluciones.
10.- $a = 2$ $b = 3$		

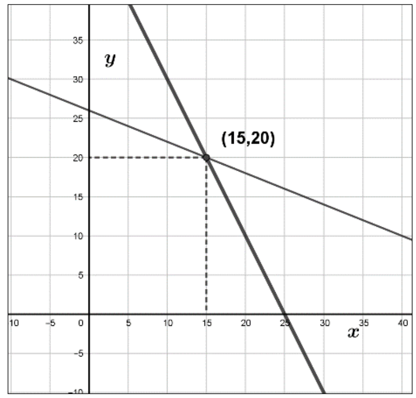
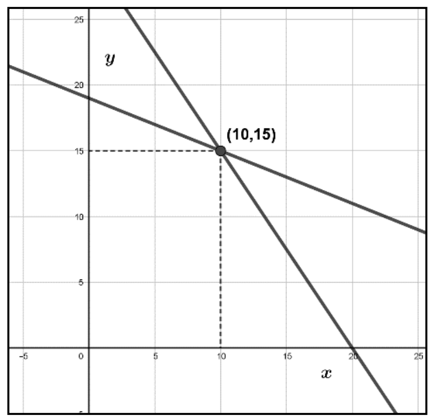
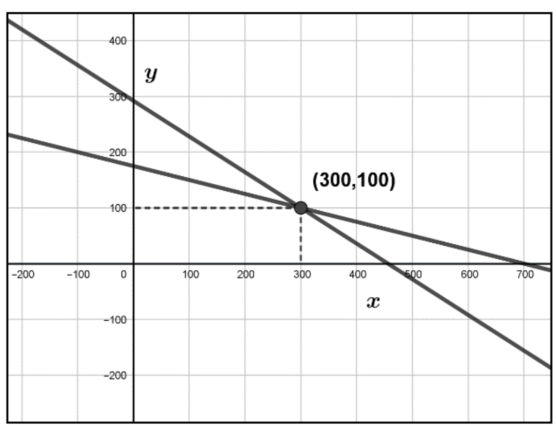
Serie 3

1.- $x =$ el \$ de las plumas $y =$ el \$ de los colores $5x + 3y = 136$ $3x + 4y = 108$	2.- $x =$ # de boletos de adultos $y =$ # de boletos de niños $x + y = 600$ $400x + 150y = 196250$	3.- $x =$ # de botellas de \$2 y =# de botellas de \$5 $x + y = 120$ $2x + 5y = 300$ x =100 es el # botellas de \$2.

$x =$ \$20 el precio de la pluma. $y =$ \$12 el precio del color.	$x = 425$ es el # boletos de adultos. $y = 175$ es el # boletos de niño.	$y = 20$ es el # botellas de \$5
4.- $x =$# de galletas de 6 g Nuez. $y =$# de galletas de 3 g de chocolate. $x + y = 90$ $6x + 3y = 450$ $x =$60 es el # de galletas de 6 g Nuez. $y = 30$ es el # de galletas de 3 g de chocolate.	5.- $x =$primer número $y =$segundo número $x + y = 25$ $x - y = 9$ $x =$17 es el primer número $y =$8 es el segundo número	6.- $x = 7$ $y = -5$
7.-. Sistema equivalente o dependiente. Múltiples soluciones.	8.- $x = 1$ $y = 1$	9.- $x = \frac{1}{4}$ $y = \frac{3}{4}$
10.-. $x = 3$ $y = -1$		

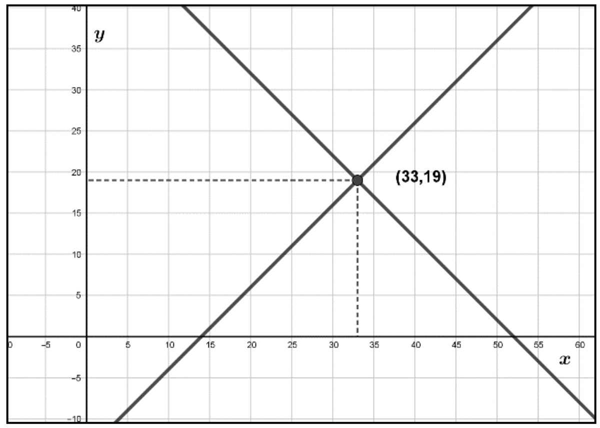
Serie 4

Solución	Grafica.
1.- $x =$# de moscas. $y =$# de arañas. $x + y = 42$ $6x + 8y = 276$ $x =$30 es el # de moscas $y = 12$ es el # de arañas	

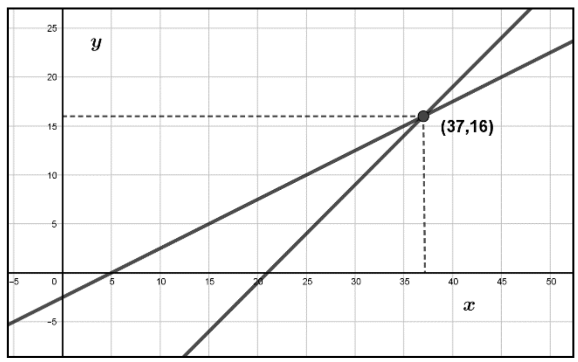
2.- $x =$ el \$ del kg de naranjas $y =$ el \$ del kg de patatas $2x + 5y = 130$ $4x + 2y = 100$ $x =$ \$15 el precio por kg de naranja. $y =$ \$20 el precio por kg de patatas.	
3. $x =$ el \$ de canicas de cristal $y =$ el \$ de las canicas de acero $3x + 2y = 60$ $2x + 5y = 95$ $x =$ \$10 el precio por canica de cristal. $y =$\$15 el precio por canica de acero.	
4.- $x =$ el \$ de los boletos clase A $y =$ el \$ de los boletos clase B $32x + 50y = 14600$ $10x + 40y = 7000$ $x =$ \$300 el precio por boleto clase A $y =$ \$100 el precio por boleto clase B.	

<table>
<tr>
<td>
5.-
x =primer número
y =segundo número

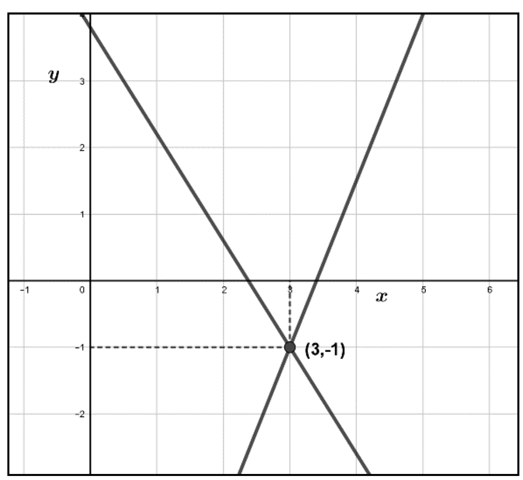
$$x - y = 14$$
$$\frac{x + y}{4} = 13$$

$x = 33$ es el primer número
y =19 es el segundo número.
</td>
<td>


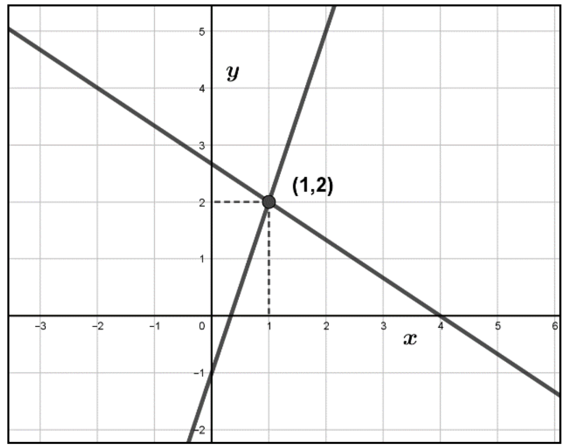
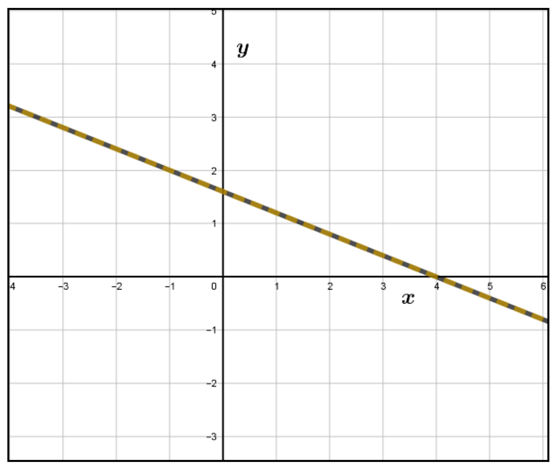
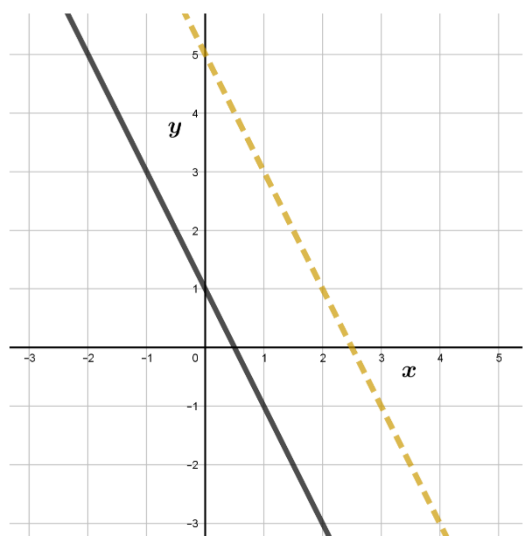
</td>
</tr>
<tr>
<td>
6.-

$$x = 37$$
$$y = 16$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>
7.-

$$w = 3$$
$$t = -1$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

8.- $x = 1$ $y = 2$	
9.- Sistema equivalente o dependiente. Múltiples soluciones.	
10.- Sistema incompatible o inconsistente. Sin solución.	

Serie 5

1.- x=Refrescos 120 y=cerveza 160 z=vino 220 $x+y+z=500$ $x+y-60=z$ $0.06x+0.12y+0.3z=92.5$	2.- x=C1 20kg y=C2 10 kg z=N 35kg $x+y+z=65$ $3x+5y+8z=390$ $x=2y$	3.- x=hip 10 y=C mayor 8 z=C menor 6 $x+y+z=24$ $2x=2z+y$ $6z+8y-10x=0$
4.- x=A pasajeros $150 y= automóviles $100 z=T de carga $50 $x+y+z=300$ $200x+120y+150z$ $=49500$ $x+z=2y$	5.- x=$ Hamburguesas $8 y=$papas $2 z=$Refresco $4 $5x+2y+3z=56$ $4x+3y+2z=46$ $6x+4y+3z=68$	6- $x=1$ $y=2$ $z=3$
7.- $x=2$ $y=2$ $z=2$	8.- $x=-1$ $y=0$ $z=-2$	9.- $x=1$ $y=10$ $z=12$
$x=5/3$ $y=5/3$ $z=-1$		

Autoevaluación

1. Resuelve las siguientes operaciones y simplifica

$$\frac{2}{3-\frac{1}{2\left(\frac{3}{\frac{3+1}{3}}\right)}}=$$

2. Aplica las leyes de los exponentes

$$\left(\frac{3a^4}{2a^3}\right)^2=$$

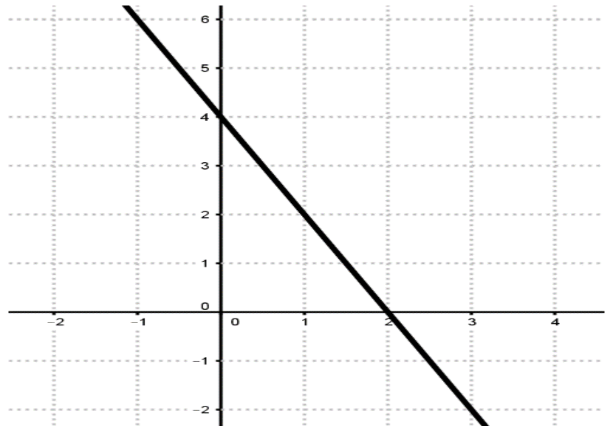
3. Utiliza las leyes de los radicales

$$\sqrt[3]{\frac{8a^4b^{10}c}{27ab^4c}}=$$

4. Alan y Pedro comen en la misma taquería, pero Alan asiste cada 20 días y Pedro cada 30 días, si hoy se encontraron ¿después de cuántos días volverán a encontrarse?

5. La fuerza (F) necesaria para mover un objeto sobre un plano varía proporcionalmente con el peso (W) del mismo. Si se aplica una fuerza de 65 N a un objeto que pesa 50kg, cuál será el peso si se aplica una fuerza de 95 N.

a) Indica cual es la variable dependiente y cuál es la independiente
b) La ecuación que me represente el problema
c) El valor de la constante
d) El valor del peso
6. A partir de la gráfica obtén la función lineal correspondiente



7. Un vendedor de pólizas de seguros recibe un sueldo diario de $80 y una comisión de $50 por cada póliza vendida.

a) ¿Cuál es la función que represente nuestro problema?

b) Si vendió 15 pólizas en un día ¿cuánto ganó?

c)Si en su día recibió $630 ¿cuántas pólizas vendió?

8. Resuelve la siguiente ecuación $\mathbf{15(2x-4)+20=-58-2(x+7)}$

9. Tres muchachos ganan en total $60. Enrique gano $2 menos que Eduardo, y Joaquín gano dos veces más que Enrique. Hallar lo que gano cada uno.

10. Resuelve la siguiente ecuación lineal

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x+1}{4}=4$$

11. La suma de 2 números enteros positivos es 190 y 1/9 de su diferencia es 2. Hallar los números.

12. Encuentra el valor de las incógnitas del siguiente sistema de ecuaciones 3x3

$$\begin{aligned} x+y+2z&=3\\ 3x-y+z&=1\\ 2x+3y-4z&=8 \end{aligned}$$

Respuestas Autoevaluación

1. $\frac{18}{25}$

2. $\frac{9a^8}{4a^6}$

3. $\frac{2}{3}ab^2$

4. Alan y Pedro volverán a encontrarse en la taquería dentro de 60 días.

5. a) La fuerza es la variable dependiente (F) la variable independiente es el peso (W)
   b) La ecuación es: $F = kW$
   c) El valor de la constante es $k = \frac{13}{10}$
   d) El peso es de $W = \frac{950}{13}$ o $W = 73.076\, kg$

6. $y = -2x + 4$

7. a) $y = 50x + 80$
   b) por vender 15 pólizas su sueldo es de $830
   c) vendió 11 pólizas

8. $x = -1$

9. $R: Enrique = \$14.50, Eduardo = \$16.50, Joaquin = \$2$

10. $x = 59$

11. x =primer número 104
    y =segundo número 86

12. $x = 1$ $y = 2$ $z = 0$

Bibliografía

1. Allen, R. (2008). *Álgebra intermedia*. México: PEARSON.
2. Barnett, Rich. *Algebra elemental*, McGraw Hill, Traducido de la primera edición en inglés. México 1990
3. García, M. (2005). *Matemáticas I para preuniversitarios*. México: ESFINGE.
4. Seminario local de Matemáticas. Guía de Matemáticas I Plan actualizado
5. Ortiz Campos, José Francisco. *Matemáticas 1, para bachillerato general*.
6. Publicaciones Cultural, Sexta reimpresión. México 2003
7. Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. México: CENGAGE.
8. https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad1/SimbolizacionesNumerosRacionales/introduccion (consultado el 7 de marzo de 2019)
9. https://www.matesfacil.com/ESO/numeros/porcentajes/porcentaje-por-ciento-proporcion-definicion-concepto-ejemplos-test-problemas-resueltos-oferta-rebaja-aumento-ejercicios.html (consultado el 14 de marzo de 2019)