Universidad Nacional Autónoma de México

Colegio de Ciencias y Humanidades
plantel Naucalpan
Física III

Material para el curso de Programa de Apoyo al Egreso PAE

Elaboraron:
Gómez Moya Salvado
López Suárez Jacobo

Coordino:Gómez Moya Salvador

año 2022

Índice general

Unidad I. Sistemas de cuerpos rígidos

Capítulo 1

Movimiento Circular Uniforme

Un móvil que sigue con rapidez constante una trayectoria curva, experimenta aceleración, ya que su dirección cambia a cada instante, y su velocidad no es constante. el vector aceleración no apunta en la dirección de la trayectoria sino hacia el centro de la curvatura , esta tipo de aceleración recibe el nombre de **aceleración centrípeta**, que significa aceleración “que busca el centro”.

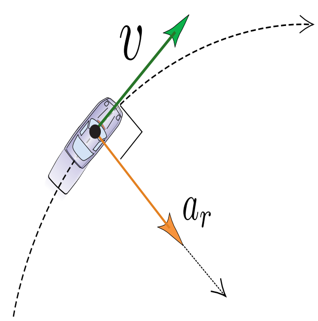


Figura 1.1: Automóvil con rapidez constante al rededor de un curva

La figura **1.1** muestra que la aceleración es exactamente perpendicular a la rapidez constante en una trayectoria circular

De acuerdo con la segunda ley de Newton todo objeto que acelera experimenta una fuerza diferente de cero a cuál le denomina **fuerza centrípeta**, pero no se trata de ningún tipo de fuerza que requiera una clasificación especial. Si un objeto presenta una trayectoria curva es porque se les está aplicando una fuerza que lo obliga a seguir este periplo.

Podemos decir que usamos el término **fuerza centrípeta** para definir al conjunto de todas la fuerzas dirigidas hacia el centro, que hace que el cuerpo siga una trayectoria curva o circular.

Las trayectoria curvas de los objeto son frecuentes en el cosmos. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento.

1.1. Aceleración centrípeta y Fuerza centrípeta.

Si queremos obtener una expresión para determinar la aceleración de un objeto en un trayectoria curva hacemos uso de la definición de aceleración

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(a) El vector de velocidad de un objeto en movimiento circular uniforme cambia constantemente de dirección

(b) Construcción para determinar la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, dirigida hacia el centro del círculo.

Figura 1.2: movimiento circular uniforme

Donde Δv es el cambio de velocidad durante un intervalo de tiempo Δt. si el intervalo de tiempo es extremadamente pequeño, entonces $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ de la figura 1.2 podemos ver que los triángulo OAB y $v_1 v_2 \Delta v$ son congruente de esta manera por congruencia de triángulos

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{l}{r}$$

Ésta es una igualdad exacta cuando Δt tiende a cero, porque entonces la longitud del arco Δl es igual a la longitud de la cuerda AB. Se desea encontrar la aceleración instantánea, de modo que se permite que Δt tienda a cero, se escribe la expresión anterior como una igualdad y luego se resuelve para Δv :

$$\Delta v = \frac{v}{r}\Delta l$$

Para obtener la aceleración centrípeta, a_r , se divide Δv entre Δt :

$$a_r = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Pero $\Delta l/\Delta t$ es justo la rapidez lineal, v, del objeto, de modo que

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r}} \tag{1.1}$$

donde: a_r = aceración centrípeta
v = velocidad
r = distancia al centro de la curvatura

$$\boxed{F = ma_r = \frac{mv^2}{r}} \tag{1.2}$$

donde: a_r = aceración centrípeta
v = velocidad
r = distancia al centro de la curvatura
m = masa
F = Fuerza

La "fuerza centrípeta" expresada en **1.2** es una clasificación que involucra fuerzas actuando hacia un punto central, como la tensión de una cuerda debido a una pelota atada en su extremo o de la gravedad sobre un satélite. Una fuerza centrípeta debe ser suministrada por alguna fuerza física real

Algunas estrategias aplicadas en la resolución de problemas donde intervienen fuerzas centrípetas son :

1. **Dibuje un diagrama de cuerpo libre** del objeto en consideración y resalte todas las fuerzas que actúan sobre él. Asegúrese de identificar la fuente de cada fuerza (tensión en una cuerda, gravedad de la Tierra,fricción, fuerza normal, etcétera). No incluya algo que no pueda identificar con un agente físico (como una fuerza centrífuga).

2. **Determine** cuál de esas fuerzas, o cuál de sus componentes actúa para producir la aceleración centrípeta, es decir, todas las fuerzas o componentes que actúan radial mente, hacia o desde el centro de la trayectoria circular. La suma de esas fuerzas (o componentes) es responsa ble de producir la aceleración centrípeta a $a_r = \frac{v^2}{r}$

3. **Elija un sistema de coordenadas** de manera que tenga un eje perpendicular a la trayectoria circular (dirección radial) y un eje tangente a la trayectoria circular (dirección angular o tangencial). Frecuentemente, es necesaria también la dirección normal perpendicular al plano de movimiento.

4. **Encuentre la fuerza neta** F_c **hacia el centro** de la trayectoria circular, $F_c = \Sigma F_r$, donde ΣF_r es la suma de las componentes radiales de las fuerzas. Esta fuerza radial neta causa la aceleración centrípeta.

5. **Use la segunda ley de Newton** para las direcciones radial, tangencial y normal, Recuerde que la magnitud de la aceleración centrípeta para el movimiento circular uniforme puede escribirse $a = \frac{v^2}{r}$

6. **Resuelva** para las cantidades desconocidas.

Ejemplo 1.1.1 Fuerza centrípeta

¿Cuál es la máxima rapidez con la que un automóvil puede tomar una curva de 50 m de radio en un camino plano como se muestra en la figura 1.3. Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es 0.80?

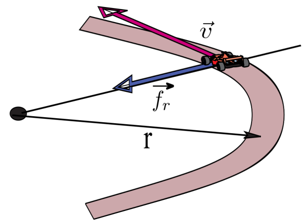


Figura 1.3

SOLUCIÓN

$$\frac{mv^2}{r} = \mu_k mg$$

$$mv^2 = \mu_k mgr$$

$$v = \sqrt{\mu_k gr} = \sqrt{0\,8(9\,8\ \text{m/s}^2)(50\ \text{m})} = 19.79\ \text{m/s}$$

Ejemplo 1.1.2 Fuerza normal

Un piloto lleva a su aeronave en un lazo vertical (figura **1.4**. a) Si el jet se mueve con una rapidez de 1300 km/h en el punto inferior del lazo, determine el radio mínimo del círculo de modo que la aceleración centrípeta en el punto inferior no supere 6.0 g. b) Calcule el peso efectivo del piloto de 78 kg (la fuerza con la que el asiento lo empuja) en la parte baja del círculo y c) en lo alto del círculo (suponiendo la misma rapidez).

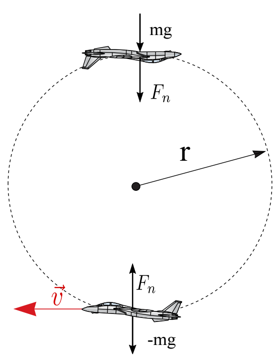


Figura 1.4

SOLUCIÓN

realizamos la transformación de unidades de km/h a m/s

$$v = 1300\text{km/h}\left(\frac{\text{h}}{3600\text{s}}\right)\left(\frac{1000\ \text{m}}{\text{km}}\right) = 361\ \text{m/s}$$

A fin de obtener el radio r igualamos la aceleración centrípeta $v^2/r = 6g$

$$r = \frac{v^2}{6g} = \frac{(361\text{m/s})^2}{6(9.8\text{ m/s}^2)} = 2216\text{ m}$$

en el diagrama dela figura se asigna la dirección positiva de las fuerzas en dirección del centro de la curva Cuando el objeto se encuentra en el punto bajo de la trayectoria, se observa en la figura que la fuerza radial no balanceada sobre él es

$$F_n - mg = m\frac{v^2}{r}$$

y recordamos que para el ejercicio $v^2/r = 6g$

$$F_n - mg = 6gm$$

$$F_n = 6gm + mg$$

$$F_n = 7gm = 7(9.8\text{ m/s}^2)(78\text{ kg}) = 5350.8 \approx 5.4 \times 10^3\text{ N} = 5.4\text{ kN}$$

EL mismo razonamiento con el diagrama nos guía a

$$F_n + mg = 6gm$$

$$F_n = 5gm = (9.8\text{ m/s}^2)(78\text{ kg}) = 3822\text{ N} \approx 3.8 \times 10^3\text{ N} = 3.8\text{ kN}$$

Ejemplo 1.1.3 ańgulo fuerza centrípeta

Como se muestra en la figura 1.5 una pelota B de 0.040 kg está amarrada a un extremo de un cordel de 24 cm de longitud, y el otro extremo se encuentra sujeto a un punto fijo O. La pelota se mueve en un círculo horizontal como se muestra. Encuentre la rapidez de la pelota en su trayectoria circular y la tensión en la cuerda si el cordel forma un ángulo de 30° con la vertical.

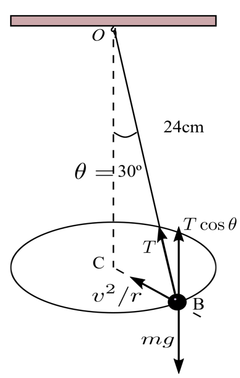


Figura 1.5

SOLUCIÓN

Las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son su peso mg y la tensión F T en el cordel.

$$T\,\text{sen}\,\theta = \frac{mv^2}{r}$$

$$T\cos\theta = mg$$

Al resolver para T en la segunda ecuación y sustituirlo en la primera se llega a

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{mv^2}{r} = mg\tan\theta$$

$$v^2 = rg\tan\theta$$

El radio $r = BC\,\mathrm{sen}\,30° = (0.24\ \mathrm{m})\,\mathrm{sen}\,30° = 0.12\ \mathrm{m}$

$$v = \sqrt{rg\tan\theta} = \sqrt{(0\,12\ \mathrm{m})(9\,8\ \mathrm{m/s^2})\tan 30°} = 0.82\ \mathrm{m/s}$$

para la tensión

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{(0.04\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{\cos 30°} = 0.452\ \mathrm{N}$$

Ejemplo 1.1.4 Peralte

Una curva de 30 m de radio va a peraltarse para que un auto pueda tomarla con una rapidez de 13 m/s sin depender de la fricción. ¿Cuál debe ser la pendiente de la curva (ángulo de peralte)?

SOLUCIÓN

El problema requiere que se dibuje un diagrama de cuerpo libre, del DCL se puede observar que existen dos fuerzas sobre el vehículo la gravedad y la fuerza normal $\vec{F}_n$ dado la curva tiene peralte la fuerza normal tiene una componente horizontal que produce una aceleración centrípeta

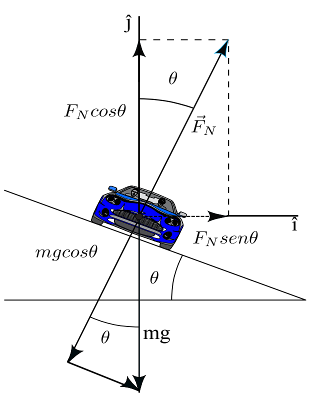


Figura 1.6

para el eje $\hat{\mathbf{j}}$ podemos aplicar $\Sigma F_j = 0$

$$F_n\cos\theta - mg = 0$$

$$F_n\cos\theta = mg$$

$$F_n = \frac{mg}{\cos\theta}$$

y pare el eje $\hat{\mathbf{i}}$ hacemos $\Sigma F_i = ma_c$

$$F_n \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r} =$$

al sustituir el valor de F_n

$$\frac{mg \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{mv^2}{mgr}$$

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

Por lo que el ángulo es igual a

$$\theta = \arctan\left(\frac{v^2}{gr}\right) = \arctan\left[\frac{(13\ \mathrm{m/s})^2}{(30\ \mathrm{m})(9.8\ \mathrm{m/s^2})}\right] = 29.86^\circ \approx 30^\circ$$

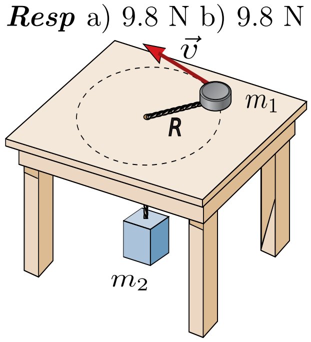
velocidad angular

Aceleración angular

1. Un camión ligero puede rodear una curva plana de 150 m de radio a una velocidad máxima de 32.0 m/s. ¿Con qué velocidad máxima puede rodear una curva de 75.0 m de radio?
   Resp 22.6 m/s

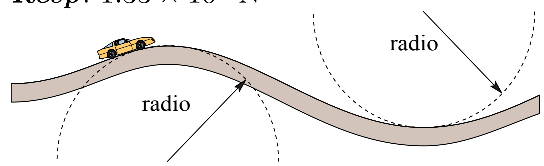
2. En un día lluvioso, el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es de sólo 0.4. ¿Cuál es la rapidez máxima a la que puede transitar un automóvil en una curva de 80 m de radio?
   Resp. 63.8 km/h

3. Un disco de masa $m_1 = 0.25$ kg se ata a una cuerda y se hace girar en un círculo de radio $R = 1.0$ m sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de m_1 la cuerda pasa por un R agujero ubicado en el centro de la mesa, y una masa $m_2 = 1.0$ kg se ata a él (masa suspendida permanece en equilibrio mientras gira el disco sobre la mesa. a) ¿Cuál es la tensión sobre la cuerda? b) ¿Cuál es la fuerza horizontal que actúa sobre el disco? c) ¿Cuál es la velocidad del disco?
   Resp a) 9.8 N b) 9.8 N c) 6.3 m/s

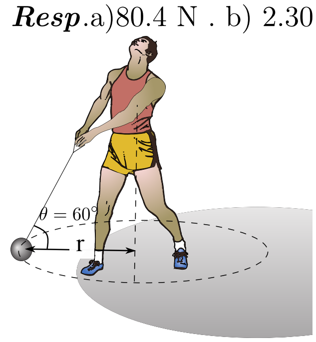


4. Una plataforma gira libremente a 100 rev/m. Si el coeficiente de fricción estática es 0.5, ¿a qué distancia del centro de la plataforma se puede colocar un perno sin que resbale?
   Resp. 4.45 cm

5. En la figura se conduce un automóvil con rapidez constante sobre una colina circular y luego hacia un valle circular con el mismo radio. En el cima de la colina, la fuerza normal sobre el conductor desde el asiento del automóvil es 0. La masa del conductor es de 70.0 kg. ¿Cuál es la magnitud de la centrípeta fuerza sobre el conductor desde el asiento cuando el coche pasa por la fondo del valle?
   Resp. 1.33×10^3 N



6. Durante la práctica de un lanzador de martillo, la cabeza A del martillo de 7.1 kg gira a una velocidad constante v en un círculo horizontal como se muestra en la figura. Si r=0.93 m y $\theta = 60°$, determine a) la tensión en el alambre BC, b) la rapidez de la cabeza del martillo
   Resp.a)80.4 N . b) 2.30 m/s .



Capítulo 2

Gravitación Universal

La gravedad es una fuerza fundamental de la naturaleza, responsable de la atracción entre objetos con masa, una de las cuatro fuerzas que mantiene unida toda la realidad. La fuerza es extremadamente débil al menos para objetos pequeños por lo que las primeras mediciones de su naturaleza fueron hechas por astrónomos, e interpretada por Isaac Newton quien deduje que se trataba de un propiedad universal de la materia y su intensidad depende de la masa de los objetos, a mayor masa es más fuerte y a menor materia menos intensa, pero también depende de la distancia, conforme a aumentar la separación entre los objetos la atracción entre ellos se diluye .

La comprobación experimental de la aseveración de su universalidad es decir que no estaba confinada a la interacción de objetos celestes sino que era universal requirió de equipos muy sensibles los cuales demostraron inequívocamente que la gravedad es un propiedad de la materia. El más famoso conocido como ''la balanza de torsión de Cavendish"

Ley de Gravitación Universal

Toda partícula en el Universo atrae a todas las otras partículas con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. Esta fuerza actúa a lo largo de la línea que une a las dos partículas.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.1}$$

donde:

F	=	Fuerza en N
G	=	6.67×10^{-11} $\mathrm{Nm^2/kg^2}$ Constante de gravitación universal
m_1, m_2	=	masa
r	=	distancia entre las masas

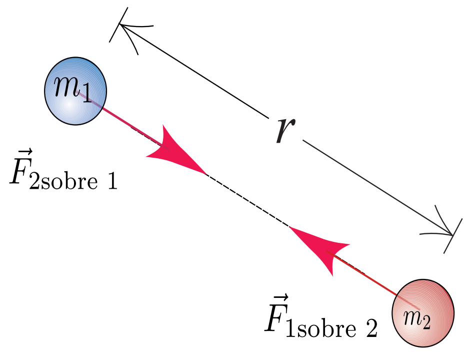


Figura 2.1: se puede observar que las fuerzas gravitatorias que actúan sobre cada una de las partículas son fuerzas de acción y reacción y, por tanto, tienen el mismo valor, son de sentidos contrarios y sus líneas de acción coinciden con la recta que las une.

Ejemplo 2.0.1 Atracción gravitacional

Calcule la fuerza de la gravedad de la Tierra sobre una nave espacial a 12,800 km (2 radios terrestres) sobre la superficie de la Tierra si su masa es de 1350 kg. el radio de la tierra igual a $r_T = 6.389 \times 10^6$ m

SOLUCIÓN

La distancia total a partir del centro del planeta es igual a 3 vece el radio de la tierra así la fuerza de atracción es igual a

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(5.98\times 10^{24}\ \mathrm{kg})(1350\ \mathrm{kg})}{(3(6.389\times 10^6\ \mathrm{m}))^2} = 1466.56\ \mathrm{N}$$

Ejemplo 2.0.2 gravitación y fuerza centrípeta

Una nave espacial orbita la Luna a una altura de 20 000 m. Si supone que sólo está sujeta al jalón gravitacional de la Luna, encuentre su rapidez Para la Luna, $m_l = 7.34 \times 10^{22}$ kg y $r = 1.738 \times 10^6$ m.

SOLUCIÓN

La fuerza gravitacional de la Luna sobre la nave proporciona la fuerza centrípeta requerida: $F_G = F_c$ y la distancia desde centro de la luna a la nave espacial es igual a 1.738×10^6 m $+ 0.02 \times 10^6$ m $= 1.758 \times 10^6$ m

$$\frac{m_n v^2}{R} = G\frac{m_l m_n}{R^2}$$

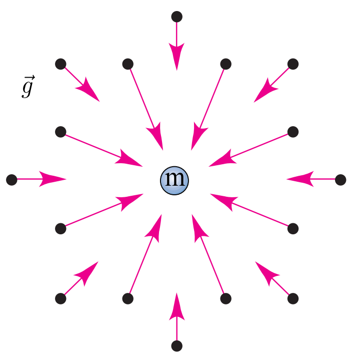
$$v^2 = \frac{G m_l}{R}$$

$$v = \sqrt{\frac{G m_l}{R}} = \sqrt{\frac{(6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(7.34\times 10^{22}\ \mathrm{kg})}{1.758\times 10^6\ \mathrm{m}}} = 1.669\times 10^3\ \mathrm{m} \approx 1.67\ \mathrm{km}$$

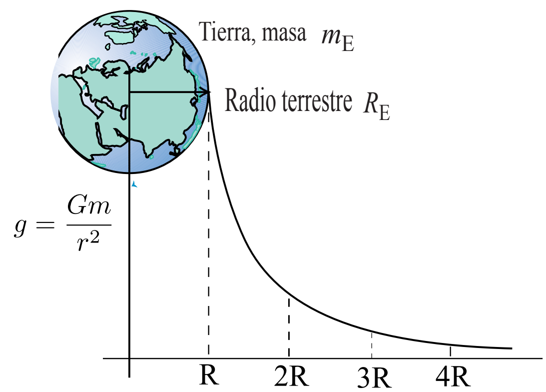
2.1. Campo gravitacional y peso

Los objetos con masa modifican de alguna manera el espacio a este le llamaremos campo gravitacional $\vec{g}$ este campo rodea a todo objeto que tenga masa y permea todo el espacio. dotando al vacío da la propiedad de atraer objetos . Para medir la distorsión provocada por un cuerpo de masa m acercaremos otro objeto de masa m_0 a la cual bautizaremos como masa de prueba , a diferente posiciones la fuerza que experimenta m_0 se modifica, aunque es claro que ambas se atraen solo nos centramos en los efecto provocado por m.

Una vez calculado el campo producido por una masa podemos predecir de la fuerza, y la dirección que experimentara una masa m_0 que se coloque en proximidad de nuestra fuente de campo



(a) Campo producido por una masa m y vectores de fuerza que experimenta una masa de prueba m_0



(b) el campo gravitatorio disminuye con el cuadrado de la distancia

La intensidad de campo gravitatorio de una masa M en un punto representa la fuerza que experimentaría la unidad de masa colocada en dicho punto. Su unidad en el S.I. es, por tanto, N/kg, o también sm^{-2}.

Podemos definir el campo gravitacional como la fuerza de gravedad por unidad de masa en cualquier punto del espacio.

$$\vec{g} = \frac{Fg}{m_0} = -G\frac{m}{r^2} \tag{2.2}$$

Propiedades del campo gravitacional

- Un campo gravitacional siempre apunta a la dirección objeto que lo produce de ahí su signo negativo
- EL campo $\vec{g}$ decrece con el cuadrado de la distancia
- El campo gravitacional es una entidad que existe en todo el espacio
- La intensidad del campo gravitatorio en un punto viene determinada por la aceleración que experimenta un objeto colocado en dicho punto.
- La dirección de la intensidad del campo (aceleración gravitatoria) es la que pasa por el centro de masa del cuerpo que crea el campo y el punto del espacio donde se está considerando el valor del campo

Una región del espacio puede estar bajo la influencia no solo de un campo gravitacional sino de varios.Cuando hay más de una masa generando un campo gravitatorio se aplica el principio de superposición: el campo gravitacional será el resultado de la suma vectorial de los campos generados por cada una de las masas.

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \cdots + g_n \tag{2.3}$$

Ejemplo 2.1.1 Campo gravitacional

La distancia promedio de separación entre la Tierra $m_t = 5.98 \times 10^{24}$ kg , y la Luna $m_l = 7.35 \times 10^{22}$ kg es de 3.84×10^8 m para encontrar la fuerza gravitacional neta ejercida por

la Tierra y la Luna sobre una nave espacial de masa 3.00×10^4 kg ubicada a la mitad del camino entre ellas.

SOLUCIÓN

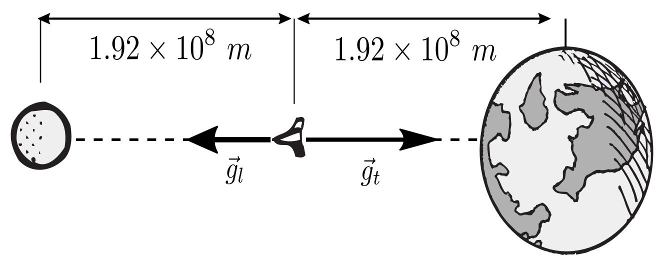


Figura 2.3: DCL

El objeto se encuentre a la mitad de camino entre la tierra y la luna $r = 1.92 \times 10^8$ m, apreciamos en el dibujo vectores en sentido contrario por lo que podemos calcular el campo en el punto medio $\vec{g_T}$ de la siguiente manera

$$\vec{g_T} = \text{campo generado por la tierra } - \text{campo genedaro por la luna} = \vec{g}_t - \vec{g}_l$$

$$\begin{aligned}
\vec{g_T} &= \vec{g}_t\hat{\mathbf{i}} - \vec{g}_l\hat{\mathbf{i}} = \frac{Gm_t}{r^2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{Gm_l}{r^2}\hat{\mathbf{i}} = \frac{G}{r^2}(m_t - m_l)\hat{\mathbf{i}} \\
&= \frac{6.67 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2}{(1.92 \times 10^8\ \text{m})^2}(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg} - 0.0735 \times 10^{24}\ \text{kg})\hat{\mathbf{i}} \\
&= 0.01069\ \text{N/kg}\hat{\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

Finalmente la fuerza que experimenta la nave espacial es igual al modulo del campo gravitacional por la masa del objeto

$$F = mg_T = (3 \times 10^4\ \text{kg})(0.01069\ \text{N/kg}) = 320.78\ \text{N}$$

Ejemplo 2.1.2 Fuerza sobre la luna

Encuentre la fuerza neta sobre la Luna $m_l = 7.35 \times 10^{22}$ kg debida a la atracción gravitacional tanto de la Tierra $m_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg como del Sol $m_S = 1.993 \times 10^{30}$ kg, suponiendo que están en ángulos rectos entre sí, como se observa en la figura la distancia entre el sol y la luna $r_1 = 1.5 \times 10^{11}$m y la distancia entre la tierra y la luna $r_2 = 3.84 \times 10^8$ m

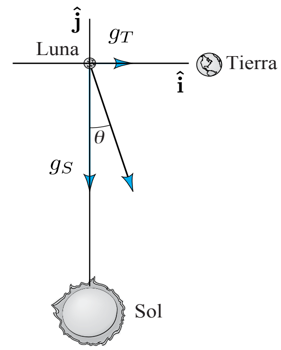


Figura 2.4

SOLUCIÓN

evaluaremos el valor tanto del campo gravitacional terrestre como del campo gravitatorio solar, estos campos independientes se pueden sumar de forma vectorial lo cual nos permitirá encontrar el valor de la fuerza ejercida sobre la luna debida al astro, y al planeta

para el sol

$$g_S = -\frac{Gm_S}{(r_1)^2}\hat{\mathbf{j}} = -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(1.99 \times 10^{30}\ \mathrm{kg})}{(1.5 \times 10^{11}\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{j}} = -0.0059\ \hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N/kg}$$

para la tierra

$$g_T = \frac{Gm_S}{(r_1)^2}\hat{\mathbf{i}} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{(3.84 \times 10^{8}\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{i}} = 0.0027\ \hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/kg}$$

La magnitud del campo gravitacional es igual a

$$g = \sqrt{(-0.0059\ \mathrm{N/kg})^2 + (0.0027\ \mathrm{N/kg})^2} = 0.00648\ \mathrm{N/kg}$$

Por lo que la fuerza que experimenta la luna es igual a

$$F = gm = (0.00648\ \mathrm{N/kg})(7.35 \times 10^{22}\ \mathrm{kg}) = 4.76 \times 10^{20}\ \mathrm{N}$$

2.1.1. Peso

Peso es la fuerza que ejerce un campo gravitacional sobre un objeto con masa, y no se un valor constante no depende solo de la masa sino que varía con respecto al centro de un campo gravitacional o dicho de otra manera depende donde se encuentre el objeto en el universo el peso tendrá uno u otro valor por ejemplo: en la tierra el peso en la cima de una montaña será ligeramente menor que si es medido a nivel del mar la experiencia es más dramática para quienes han visto a los cosmonautas en la luna, ahí los astronautas parecen flotar.

la definición de peso reza así

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo.

Ejemplo 2.1.3 Ley de Gravitación universal

Un hombre tiene una masa de 75 kg en la superficie terrestre. ¿A qué altura tendría que subir para “perder” el 10 % de su peso corporal?

SOLUCIÓN

El hombre presentará un 10 % menos de su peso es decir $w = 0.9mg$ la cual igualaremos con la fuerza de atracción gravitación desde el centro del planeta hasta la posición del hombre

$$0.9g = \frac{GM_T}{(R_T + h)^2}$$

$$R_T + h = \sqrt{\frac{GM_T}{0.9g}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{0.9(9.8\ \mathrm{m/s^2})}} = 6.726 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

Se sabe el radio de la tierra $R_T = 6.38 \times 10^6$ m por lo que

$$h = 6.72 \times 10^6\ \mathrm{m} - 6.38 \times 10^6\ \mathrm{m} = 0.34 \times 10^6\ \mathrm{m} = 340 \times 10^3\ \mathrm{m} = 340\ \mathrm{km}$$

Ejemplo 2.1.4 aceleración en Marte

Calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie de de Marte . El radio de la Marte es de 3.397×10^6 m y su masa es de 6.4185×10^{23} kg

SOLUCIÓN

La fuerza de atracción gravitacional en cualquier planeta es igual a

$$F = mg_{marte}$$

y la fuerza de gravitación e igual a

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

igualando ambas ecuaciones

$$mg_{marte} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$g_{marte} = \frac{GM}{r^2} = \frac{(6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(6.4185 \times 10^{23}\ \mathrm{kg})}{(3.397 \times 10^6\ \mathrm{m})^2} = 3.712\ \mathrm{m/s^2}$$

2.2. Leyes de Kepler

El paisaje que nos muestra la ciencia con un sol rodeado de planetas, que circulan en torno suyo en órbitas elípticas , es el resultado de varios siglos de un periplo, entre debates filosóficos , dogma religioso y celosas observaciones del firmamento. Estos desencuentros culmina con la formulación de la ley de Gravitación universal por parte de Isaac Newton, finiquitando cualquier debate en contra del modelo heliocéntrico ”Con el sol en el centro ”.

Una forma de confirmar la validez de esta ley universal se logra gracias a los trabajos del astrónomo alemán Johannes Kepler.

Kepler logra describir matemáticamente el movimiento de los planetas y su órbitas alrededor del sol usando las los datos de otro astrónomo Tycho Brane, con estos datos y el modelo de Copérnico, encuentra tres enunciado empíricos que no solo son válidos para nuestro sistema solar sino que son aplicables a cualquier sistemas sujeto a la ley del inverso del cuadrado

Es oportuno aclarar que lo que conocemos como leyes de Kepler se pueden deducir directamente de la ley de gravitación de Newton

Primera ley de Kepler

La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco

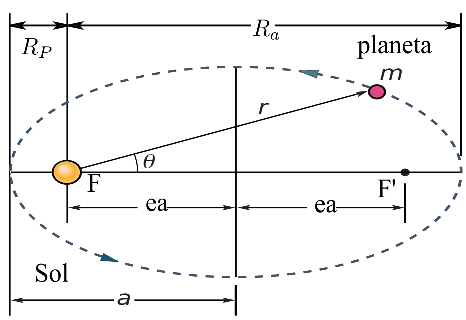


Figura 2.5: el Sol es uno de los focos de la órbita elíptica de cada planeta; el otro foco está vacío

La figura **2.5** muestra un planeta de masa m que se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. El sol está en un foco F de la elipse. El otro foco es F', que se encuentra en espacio vacío. El semieje mayor a del elipse, el perihelio (es el punto más cercano al sol) distancia R_p, y el afelio (el punto más lejano del Sol) R_a

”La primera ley surge como una consecuencia obvia de la naturaleza del cuadrado inverso de la ley de gravitación universal de Newton. Cualquier objeto ligado a otro por una fuerza que varía de acuerdo con $1/r^2$ *se moverá en una órbita elíptica. ”* (Serway, 2017) ver pag.222

Segunda ley de Kepler

Cada planeta se mueve de modo que una línea imaginaria dibujada desde el Sol hasta el planeta barre áreas iguales en periodos de tiempo iguales

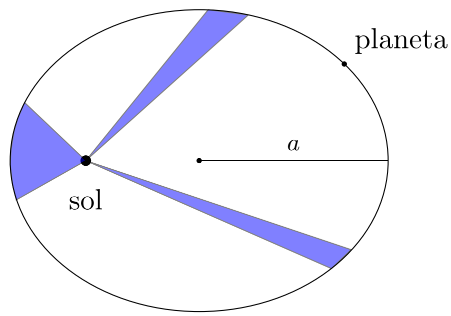


Figura 2.6: Las regiones sombreadas tienen áreas iguales.

Tercera ley de Kepler

El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo de la distancia promedio entre el planeta y el Sol; es decir, $T^2 \propto r^3$

La Tercera ley de Newton se puede deducir a partir de las ley de Gravitación Universal

$$\text{Fuerza centripeta} = \text{Fuerza de atracción gravitacional}$$

$$\frac{m_p v^2}{r} = G\frac{m_p M_S}{r^2}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

En estas ecuaciones, m_p y M_S son las masas del planeta y del Sol, respectivamente, y v es la rapidez orbital del planeta. Pero como $v = 2\pi r/T$(circunferencia/periodo distancia/tiempo), tenemos

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{GM_S}{r}}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3$$

$$k = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s}^2/\mathrm{m}^3 \tag{2.4}$$

De tal suerte que la tercera ley de Kepler se puede expresa con la siguiente formula

$$\boxed{T^2 = kr^3} \tag{2.5}$$

donde: T = Periodo
r = distancia del planeta al sol

Ejemplo 2.2.1 Tercera Ley de Kepler

El asteroide Ícaro, aunque sólo tiene unos cuantos cientos de metros de ancho, gira en torno al Sol como los planetas. Su periodo es de 410 días . ¿Cuál es su distancia media desde el Sol?

SOLUCIÓN

Transformamos los día en segundos

$$T = 410 \text{ dia} \left(\frac{24 \text{ h}}{\text{dia}}\right)\left(\frac{3600 \text{ s}}{\text{h}}\right) = 35.424 \times 10^{6} \text{ s}$$

$$T^2 = kr^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{(35.424 \times 10^{6} \text{ s})^2}{2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3}} = 1.61 \times 10^{11} \text{ m}$$

Ejemplo 2.2.2 Leyes de Kepler

La mayor de las lunas de Júpiter, Ganímedes, tiene un radio orbital de 1.07×10^9 m y un periodo de 7.16 días. Con estos datos, calcule la masa de Júpiter.

SOLUCIÓN

Conociendo r y T, se calcula k mediante la ecuación 2.5 (como k_J , para indicar que se trata de Júpiter y con M_J Masa de Jupiter

$$T = 7.16 \left(\frac{24 \text{ h}}{\text{dia}}\right)\left(\frac{3600 \text{ s}}{\text{h}}\right) = 618624 \text{ s}$$

$$T^2 = k_J r^3$$

$$k_J = \frac{T^2}{r^3} = \frac{(618624 \text{ s})^2}{(1.07 \times 10^{9} \text{ m})^3} = 3.12 \times 10^{-16} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

Para la masa de Jupiter

$$k_J = \frac{4\pi^2}{GM_J}$$

$$M_G = \frac{4\pi^2}{k_J G} = \frac{4\pi^2}{(3.12 \times 10^{-16} \text{s}^2/\text{m}^3)(6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)} = 1.89 \times 10^{27} \text{ kg}$$

Gravitación Universal

Ley de Gravitación

1. Una masa de 4 kg se encuentra a una distancia de 8 cm de una masa de 2 kg. Calcule la fuerza de atracción gravitacional entre las dos masas.
   Resp. 8.34×10^{-8} N

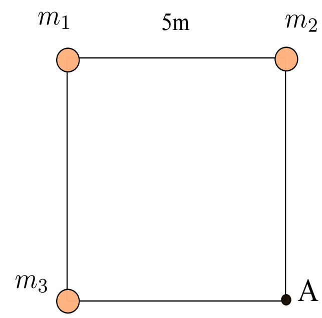
2. La aceleración debida a la gravedad en un planeta distante es de 5.00 m/s^2 y el radio del planeta es de 4560 km aproximadamente. Use la ley de la gravitación para estimar la masa de ese planeta.
   Resp. 1.56×10^{24} kg

3. ¿Cuál es la distancia desde el centro de la Tierra hasta un punto situado fuera de ella donde la aceleración gravitacional debida a la Tierra es $\frac{1}{10}$ de su valor en la superficie?
   Resp. 2.02×10^{7} m

4. Calcule la rapidez de un satélite que se mueve en una órbita circular estable alrededor de la Tierra a una altura de 3600 km.
   Resp. 6.32×10^{3} m/s

5. El diámetro de Júpiter es 11 veces mayor que el de la Tierra y su masa es casi 320 veces mayor que la de nuestro planeta. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie de Júpiter?
   Resp. 25.9 m/s^2

6. En tres vértices de un cuadrado de 5 m de lado se colocan tres masas m_1, m_2 y m_3 de 12 Kg. Determinar el campo gravitacional en el cuarto vértice. ¿Qué fuerza experimentará una masa de 4 kg situada en dicho vértice.
   Resp.
   $g = 1.6 \times 10^{-11}$ N/kg, $F = 2.44 \times 10^{-10}$ N



7. Un satélite orbita la Tierra a una altura de 200 km en un círculo de 6 570 km de radio. Encuentre la rapidez del satélite y el tiempo que le toma completar una revolución. Suponga que la masa de la Tierra es de 6×10^{24}kg. (Sugerencia: La fuerza gravitacional proporciona la fuerza centrípeta.)
   Resp.7.8 km/s, 88 min.

Leyes de Kepler

8. ¿A qué distancia sobre la superficie de la Tierra debe estar un satélite para que complete una vuelta
   Resp. 4.04×10^{7} m

9. Neptuno está a una distancia promedio de 4.5×10^{9} km del Sol. Estime la duración del año neptuniano considerando que la Tierra está en promedio a 1.50×10^{8} km del Sol.
   Resp. 164.85 años

Capítulo 3

Condiciones de equilibrio

En este capítulo nos enfocaremos en el estudio de objetos donde las fuerzas aplicadas se anulan y no se produce aceleración lineal ni angular. Parece una situación bastante irreal en un mundo en constante cambio y sin embargo en muchas aplicaciones prácticas es importante que los objetos permanezcan lo más posible, imperturbables. Pongamos de ejemplo las construcciones hechas por el hombre. En este caso nos interesa que los construcciones sean lo más resistente posible en pocas palabras estáticas

3.1. Centro de masa y centro de gravedad

En un juego una pelota lanzada por el aire seguirá un trayectoria parabólica sin embargo si lanzamos un objeto por ejemplo un bat como en la figura 3.1 el movimiento descrito será más complicado los extremo rotarán y seguirán caminos que nada tiene que ver con una parábola, y aun así si se mira con cuidado existe un punto en el bat que sigue una trayectoria parabólica aun cuando todos los demás puntos no lo hagan a este punto se le conoce como centro de masa

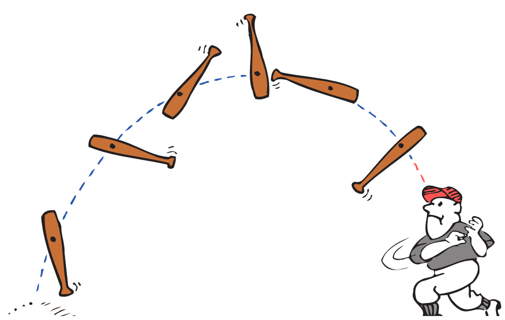


Figura 3.1: trayectoria del centro de masa de un bat lanzado por el aire

El centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

"Para un cuerpo determinado, el centro de masa es la posición promedio de toda la masa que lo forma" (Hewitt, 2016) ver pag.139

$$x_{CM} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} \tag{3.1}$$

$$y_{CM} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} \tag{3.2}$$

El centro de gravedad de un objeto es el punto en el cual se puede considerar que está concentrado todo su peso; esto es, la línea de acción del peso pasa por el centro de gravedad. Una sola fuerza vertical y dirigida hacia arriba, igual en magnitud al peso del objeto y aplicada en el centro de gravedad, mantendrá al cuerpo en equilibrio.

Ejemplo 3.1.1 Centro de masa de un conjunto de masas

Tres objetos están localizadas en un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 3.2 Encontrar el centro de gravedad $m_1 = 3kg$, $m_2 = 4kg$ y $m_3 = 8kg$

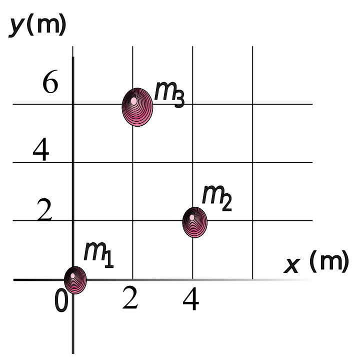


Figura 3.2

SOLUCIÓN

$$x_{CM} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{(3\text{ kg})(0\text{ m}) + (4\text{ kg})(4\text{m}) + (8\text{ kg})(2\text{ m})}{15\text{kg}} = 1.06\text{ m}$$

$$y_{CM} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{(3\text{ kg})(0\text{ m}) + (4\text{ kg})(2\text{m}) + (8\text{ kg})(6\text{ m})}{15\text{kg}} = 3.73\text{ m}$$

El centro de gravedad de una esfera, cubo, disco o placa rectangular está en su centro geométrico. El centro de gravedad de un cilindro o cono circulares rectos está en su eje de simetría. En los cuerpos de forma más compleja, a veces es posible encontrar el centro de gravedad dividiendo el cuerpo en piezas simétricas.

Ejemplo 3.1.2 centro de gravedad de una figura compuesta

Encuentre las coordenadas x y y del centro de gravedad de una hoja uniforme de madera, de 4.00 ft por 8.00 ft, cuando se ha recortado como se muestra en la figura 3.3

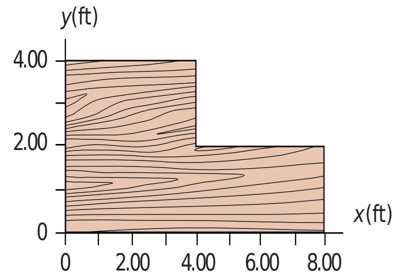


Figura 3.3

SOLUCIÓN

El área se se obtiene con la suma de ambos rectángulos, con el eje coordenado se determina el área y las coordenadas del centro de cada figura, y luego se introduce en la tabla que aparece en la parte inferior los valores

Figura	A $[ft^2]$	x $[ft]$	y $[ft]$	xA $[ft^3]$	yA $[ft^3]$
rectángulo	16	4	1	64	16
rectángulo	8	2	3	16	24
	$\Sigma A = 24\ ft^2$			$\Sigma xA = 80$	$\Sigma yA = 40$

$$x_{CG} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{40 ft^3}{24 ft^2} = 1.67\ ft$$

$$y_{CG} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{80 ft^3}{24 ft^2} = 3.3\ ft$$

Ejemplo 3.1.3 Centro de gravedad de círculos y rectángulos

Para el área plana mostrada en la figura, determine: las coordenadas del centro de gravedad.

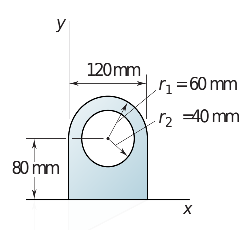


Figura 3.4

SOLUCIÓN

El área se obtiene con la suma de un rectángulo, un triángulo y un semicírculo y después se resta un círculo. Utilizando los ejes coordenados mostrados.

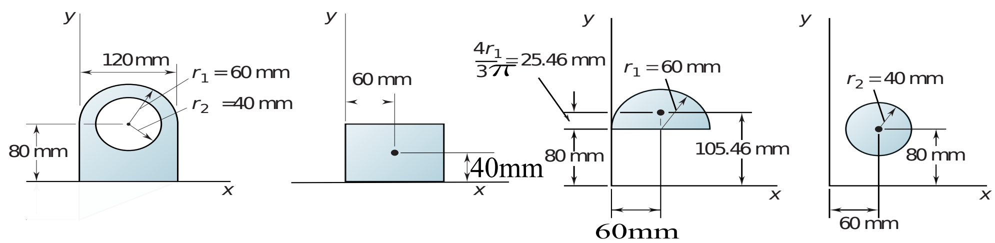


Figura	$A[\text{mm}^2]$	$x[\text{mm}]$	$x[\text{mm}]$	xA, $[\text{mm}^3]$	yA, $[\text{mm}^3]$
Retángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	576×10^3	284×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	339.3×10^3	596.4×10^3
Circulo	$-\pi(940)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 10.288 \times 10^3$			613.7×10^3	578.2×10^3

$$x_{CG} = \frac{\Sigma xA}{\Sigma A} = \frac{613.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{10.288 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 59.65 \text{ mm}$$

$$y_{CG} = \frac{\Sigma yA}{\Sigma A} = \frac{578.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{10.288 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 56.2 \text{ mm}$$

3.2. Torca

La fuerza afecta el movimiento de traslación de un cuerpo, de la misma manera una fuerza aplicada a un objeto puede modificar la velocidad angular de un objeto,sin embargo la aceleración angular del cuerpo no depende únicamente de la fuerza aplicada sino también de la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea a lo largo de la que actúa la fuerza **F**. A es distancia se le conoce como brazo de palanca **r** Al producto de la fuerza y el brazo de palanca se llama τ de fuerza y su magnitud es igual a

$$\tau = F \perp r \tag{3.3}$$

donde: τ = Torca [N m]
F = fuerza [N]
r = distancia perpendicular entre el punto de apoyo y la aplicación de la fuerza [m]

Por convención la torca se le designa positiva en sentido contrario al de las manecillas del reloj, En el momento de calcular el valor de la torca se debe revisar en qué sentido girará el objeto con respecto un punto al aplicarse la fuerza, en un ejercicio real al igual que con las fuerza se puede cambiar el sentido positivo en dirección de la rotación, un valor negativo en la magnitud de la torca se interpreta como un giro contrario al que se había previsto

$$\tau = Fr \operatorname{sen} \theta \tag{3.4}$$

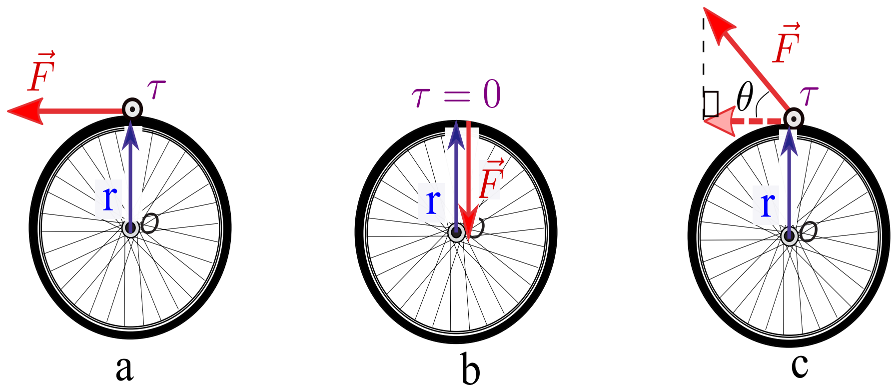


Figura 3.5: Fuerzas que actúan en diferentes ángulos en una rueda de bicicleta

Ejemplo 3.2.1 Torca

Calcule el torque neto (magnitud y dirección) en la viga en la figura 3.6 en relación con a) un eje en O perpendicular a la página y b) un eje en C perpendicular a la página.

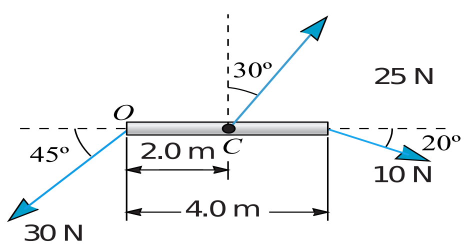


Figura 3.6

SOLUCIÓN

A) Las fuerzas sobre el punto de apoyo $\boldsymbol{O}$ no provocan rotación

$$\Sigma\tau = (25\text{ N})(2\text{ m})\operatorname{sen}60^\circ - (10\text{ N})(4\text{ m})\operatorname{sen}20^\circ = 29.62\text{ N m}$$

B) Las fuerzas sobre el punto de apoyo $\boldsymbol{C}$ no provocan rotación

$$\Sigma\tau = (30\text{ N})(2\text{ m})\operatorname{sen}45^\circ - (10\text{ N})(2\text{ m})\operatorname{sen}20^\circ = 35.58\text{ N m}$$

3.3. Condiciones de equilibrio rotacional y y de traslación

Cuando hablamos que un objeto se encuentra en equilibrio nos referimos a que el cuerpo no presenta un cambio en su estado de inercia o, bien está detenido, o bien se mueve con rapidez constante o si se aplican fuerza estas se anulan y no producen cambios de traslación, Y si además no se produce torcas estás se anulen para no giros . Así, vemos que en realidad hay dos condiciones de equilibrio; juntas, definen el llamada **equilibrio mecánico**

la primera condición de le equilibro indica que La suma de todas las fuerza sobre un cuerpo igual a cero

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum_{i=1}^{n} F_x = 0$$

$$+\uparrow \sum_{i=1}^{n} F_y = 0$$

La suma de las torcas debidas a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, con respecto a cualquier punto específico, debe ser cero

$$\circlearrowleft\!\!\!\!+ \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0$$

Ejemplo 3.3.1 Equilibrio de Fuerzas

Para estabilizar un árbol joven, se aplican tres fuerzas como muestra la figura 3.7 . $\vec{F}_A = 310$ N y $\vec{F}_B = 450$ N determine $\vec{F}_C$ en magnitud y dirección

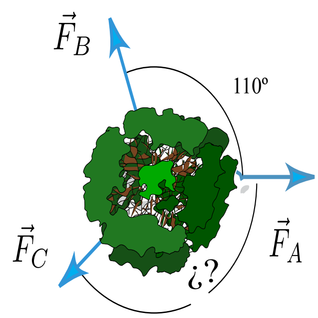


Figura 3.7

SOLUCIÓN

Vector	componente en î	componente en ĵ
$\vec{F}_A$	310N	0
$\vec{F}_B$	$425\cos 110° = -164.6$N	$950 \ \text{sen}\, 110° = -399.3$N
$\vec{F}_C$	$F_{C\hat{i}}$	$F_{C\hat{j}}$
	$F_{C\hat{i}} + 164.6\text{ N} = 0$	$F_{C\hat{j}} + 399.3\text{ N} = 0$

$$F_{C\hat{i}} = -164.6\text{ N}$$

$$F_{C\hat{j}} = -399.3\text{ N}$$

$$F_C = \sqrt{(-164.6\text{ N})^2 + (-399.3\text{ N})} = 431.6\text{ N}$$

Ejemplo 3.3.2 Equilibro rotacional

Un cocinero sostiene con la mano un envase de leche 2.00 kg, con el brazo extendido figura 3.8 ¿Qué fuerza $\vec{F}_B$ debe ejercer el bíceps? (Haga caso omiso del peso del antebrazo.)

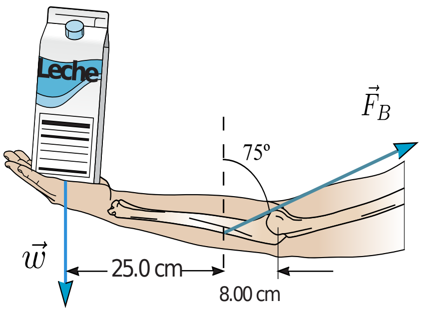


Figura 3.8

SOLUCIÓN

calculamos la magnitud del vector peso $w = 2\ \mathrm{kg}(9\,8\ \mathrm{m/s^2}) = 19.6$ N. Después aplicamos una de las condiciones de equilibrio $\overset{\curvearrowleft}{+}\Sigma\tau = 0$ de la figura vemos que
$\tau_1 = (0.33\ \mathrm{m})(19.6\mathrm{N}) = 6.468\ \mathrm{Nm}$
$\tau_2 = F_B \operatorname{sen}(15°)(0.08m)$
igualamos ambas torcas

$$F_B \operatorname{sen}(25°)(0.08\ \mathrm{m}) = 6.468\ \mathrm{Nm}$$

$$F_B = \frac{6.468\ \mathrm{Nm}}{\operatorname{sen}(15°)(0\,08\ \mathrm{m})} = 312.33\ \mathrm{N}$$

Ejemplo 3.3.3 coeficiente de fricción de una escalera

Una pintora asciende por una escalera (3.9). Si la masa de la escalera es de 12.0 kg, la masa de la pintora es de 55.0 kg y la escalera comienza a deslizarse en su base cuando los pies de la joven están en el 70 % hacia arriba a lo largo de la escalera, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo? Se supone que la pared no tiene fricción.

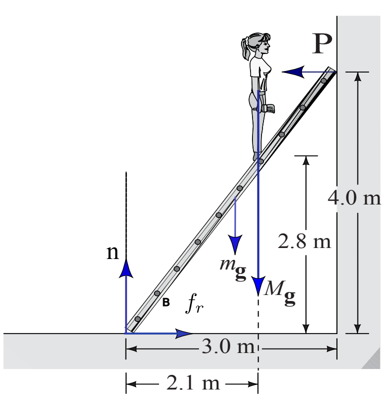


Figura 3.9

SOLUCIÓN

Se dibuja un diagrama de cuerpo libre y se aplica las condiciones de equilibrio

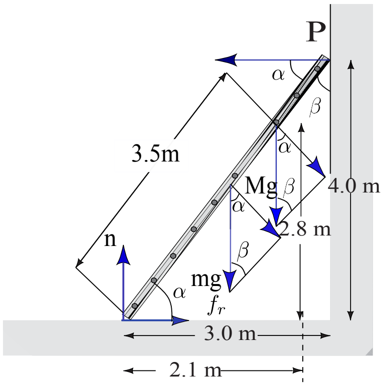


Figura 3.10

de la figura se observa que la longitud de la escalera igual a 5m y además :
sen $\alpha = \frac{4}{5}$
sen $\beta = \frac{3}{5}$

$r_3 = \sqrt{(2.1\ \text{m})^2 + (2.8\ \text{m})^2} = 3.5$ m la distancia del punto de apoyo a la posición de la chica
$r_1 = 2.5$ m distancia al C.M de la escalera
$r_2 = 5$ m Longitud de la escalera
Se aplica la primera condición de equilibrio a la escalera:

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum_{i=1}^{n} F_x = 0$$

$$fr - P = 0 \quad \Rightarrow \quad f_r = P$$

$$+\uparrow \sum_{i=1}^{n} F_y = 0$$

$$n - mg - Mg = 0$$

$$n = g(m + M) = (9.8\ \text{m/s}^2)(12\ \text{kg} + 55\ \text{kg}) = 659\ \text{N}$$

se aplica la segunda condición de equilibrio calculando los torques en la base de la escalera estando parada,

$$\circlearrowleft^{+} \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0$$

$$\tau_1 = mgr_1 \operatorname{sen}\beta = (12\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(2.5\ \text{m})(\frac{3}{5}) = 176.4\ \text{N m}$$

$$\tau_3 = Mgr_3 \operatorname{sen}\beta = (55\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(3.5\ \text{m})(\frac{3}{5}) = 1131.9\ \text{N m}$$

$$\tau_2 = Pr_2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}(5m)P = 4P$$

$$\tau_3 - \tau_1 - \tau_2 = 0$$

$$\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$$

$$4P = 176.4 \text{ Nm} + 1131.9 \text{ Nm}$$

$$P = 327.075\text{N}$$

tenemos que $f = 659.6$ N La escalera está al borde del deslizamiento, así que escribimos una expresión para la máxima fuerza de fricción estática y resolvemos para μ_s :

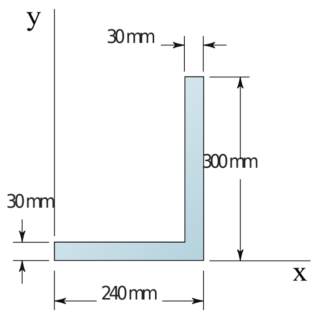
$$f_{r\max} = \mu_s n$$

$$\mu_s = \frac{f_r}{n} = \frac{327.075 \text{ N}}{659 \text{ N}} = 0.4952 \approx 0.5$$

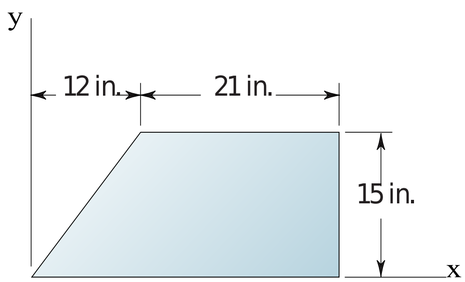
Condiciones de Equilibrio rotacional y de traslación

Torca

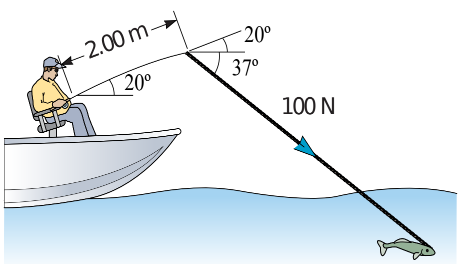
1. Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.
   Resp. $\bar{x} = 175.6$ mm, $\bar{y} = 94.4$ mm



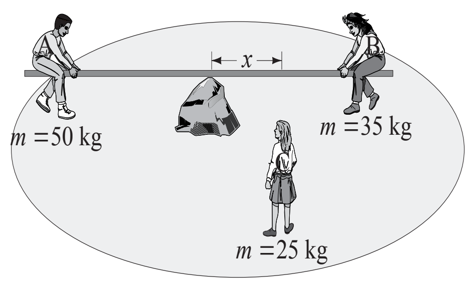
2. Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.
   Resp. $\bar{x} = 19.28$ in, $\bar{y} = 6.94$ in



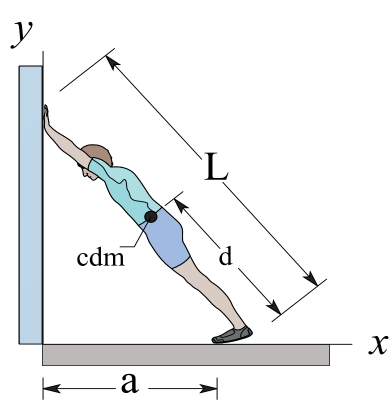
3. La caña de pescar en la figura forma un ángulo de 20° con la horizontal. ¿Cuál es la magnitud del torque ejercido por el pescado sobre un eje perpendicular a la página y que pasa por la mano del pescador si el pez tira de la línea de pesca con una fuerza $\vec{F} = 100N$ en un ángulo 37° por debajo de la horizontal? La fuerza es apli cada en un punto de 2.00 m de las manos del pescador.
   Resp. 168 N.m



4. Tres niños intentan equilibrar un sube y baja, que consiste en una piedra fulcro, que actúa como pivote en el centro, y una tabla muy ligera de 3.6 m de largo (figura 9-50). Dos compañeros de juego ya están, cada uno, en un extremo. El niño A tiene una masa de 50 kg, y la niña B tiene una masa de 35 kg. ¿Dónde se debe colocar la niña C, de 25 kg de masa, para que se equilibre el sube y baja?
   Resp. 1.08 m



5. En la figura, un escalador se inclina contra una pared vertical de hielo que tiene una fricción insignificante. La distancia a es 0.914 my la distancia L es 2.10 m. Su centro de masa está a una distancia d=0,940 m del punto de contacto entre los pies y el suelo. Si el esta en el borde de deslizamiento, ¿cuál es el coeficiente de fricción estática entre los pies y el suelo?
   Resp. 0.21



Capítulo 4

Velocidad angular

Si un objeto se pone a girar en torno a un punto fijo decimos, que objeto presente un movimiento de rotación. Para medir las variaciones de giro del cuerpo mediremos la variación de θ ángulo que tuvo el objeto , desde una posición arbitraria y se respetara la convención de medición de ángulo positivo en sentido opuesto a las agujas del reloj.

En este movimiento , todos los puntos en un radio llevan la misma velocidad angular sin importar la distancia con respecto al centro pues experimenta la misma desviación angular en cualquier tiempo dado

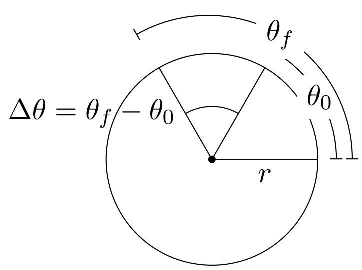


Figura 4.1: Vista de una rueda que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a un eje a través del centro O, El desplazamiento angular es $\Delta\theta = \theta_f - \theta_0$

La velocidad angular (denotada por la letra griega minúscula omega, ω) mide el número de rotaciones por unidad de tiempo

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_1}{t_f - t_i}} \tag{4.1}$$

4.1. Medición de ańgulos en radianes

La medida de un ángulo está determinada por la cantidad de rotación desde el lado inicial hasta el lado terminal. una está dada en grados y la otra en radianes.

Un radián es la medida de un ángulo central θ que interseca un arco s igual en longitud al radio r de la circunferencia. Algebraicamente, esto significa que

$$\theta = \frac{s}{r}$$

donde θ se mide en radianes

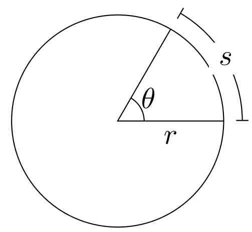


Figura 4.2: Longitud de arco s radio cuando $\theta = 1$ radián radián

4.2. Movimiento circular uniforme

Este es un caso especial del movimiento circular, donde la partícula se mueve con $\omega = constante$ En este caso de movimiento cíclico la partícula repite su posición pasando por cada punto del círculo a intervalos iguales de tiempo, como es un movimiento que se repite intervalos regulares podemos usar el concepto de periodo τ que será el tiempo requerido para completar una vuelta o completa una revolución . La frecuencia que es el número de vueltas en una fracción de tiempo el periodo se puede expresar en segundos y la frecuencia en Hertz $=\mathrm{s}^{-1} = \mathrm{hz}$ El término usual es revoluciones por segundo **rps** y algunas veces , muchas veces a esta frecuencia en movimiento se les mide en revoluciones por minuto **rpm**

4.3. aceleración ángular

La aceleración angular (denotada por la letra griega minúscula alfa, α), en analogía con la aceleración lineal, se define como el cambio en la velocidad angular dividida entre el tiempo requerido para efectuar este cambio. La aceleración angular promedio se define como

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{\Delta t} \tag{4.2}$$

$$v = r\omega \tag{4.3}$$

donde: v = velocidad lineal
r = radio
ω = velocidad angular

4.4. Rotación con aceleración angula α constante

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t \tag{4.4}$$

$$\theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t^2 \tag{4.5}$$

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha t \tag{4.6}$$

donde: ω_f = velocidad angular final
ω_i = velocidad angular final
θ = desplazamiento angular
α = aceleración angular
t = tiempo

Ejemplo 4.4.1 aceleración angular

Un ventilador se apaga cuando alcanza las 850 rev/min. Da 1500 revoluciones antes de llegar a detenerse. a) ¿Cuál es la aceleración angular del ventilador, que se supone constante? b) ¿Cuánto tiempo le tomó al ventilador llegar al alto total?

SOLUCIÓN

El ejercicio requiere cambiar las unidades de la velocidad angular ya que las únicas unidades aceptadas son los radianes, y los segundos, luego se organizan los datos y se elige la ecuación adecuada para resolver el ejercicio. el hecho que se detenga ayuda ya qeu $\omega_f = 0$

$$\omega_0 = 850 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{\text{min}}{60\text{s}}\right) = 89 \text{ rad/s}$$

$$\theta = 1500 \text{ rev} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}}\right) = 9424.7 \text{ rad}$$

$$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$$

$$\alpha = \frac{-\omega_f^2}{t} = \frac{-(89 \text{ rad/s})^2}{9424.7 \text{ rad}} = -0.4204 \text{ rad/s}^2$$

Ejemplo 4.4.2 aceleración angular

Una centrifugadora acelera uniformemente desde el reposo hasta 15,000 rpm en 220 s. ¿Cuántas revoluciones dio en este tiempo

SOLUCIÓN

EL primer paso es el cambio de unidades

$$\omega_f = 15000 \ \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{\text{min}}{60\text{s}}\right) = 157.1 \text{ rad/s}$$

este problema solicita el uso de dos expresiones , una para obtener la aceleración angular α y otra para desplazamiento angular θ. como parte del reposo $\omega_0 = 0$ así usaremos

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$

ahora bien la aceleración angular es nuestro primer objetivo como parte del reposo $\omega_0 = 0$

$$\omega_f = \alpha t$$

$$\alpha = \frac{w_f}{t} = \frac{1571 \text{ rad/s}}{220\text{s}} = 7.14 \text{ rad/s}^2$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{(7.14 \text{ rad/s}^2)(220 \text{ s})^2}{2} = 172788 \text{ rad}\left(\frac{\text{rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 27.5 \times 10^3 \text{ rev}$$

Linea	Angular
$x = v_{prom}t$	$\theta = \omega_{prom}t$
$v_f = v_i + at$	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$
$v_f^2 = v_i^2 + 2ax$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$
$x = v_i t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Tabla 4.1: Analogía entre el movimiento línea uniforme acelerado y el angular acelelerado

4.5. Relación entre cantidades angulares y lineales

Cada punto o partícula de un objeto rígido en rotación tiene, en cualquier momento, una velocidad lineal **v** y una aceleración lineal **a**. Es posible relacionar las cantidades lineales en cada punto, **v** y **a**, con las cantidades angulares del objeto en rotación, ω y α

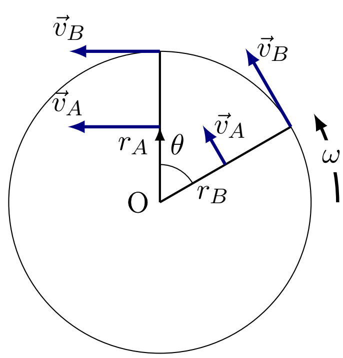


Figura 4.3: Una rueda que gira de manera uniforme en sentido contrario a las manecillas del reloj. Dos puntos sobre la rueda, a distancias r_A y r_B poseen diferente velocidades lineales

La velocidad tangencial de un punto sobre un objeto en rotación es igual a la distancia del punto al eje de rotación multiplicada por la velocidad angular. podemos combinar la expresiones de longitud de arco

$$s = \theta r \tag{4.7}$$

y velocidad angular

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\theta}{t} r \tag{4.8}$$

y simplificando obtenemos

$$v = r\omega \tag{4.9}$$

donde: ω = velocidad angular
r = radio
v = velocidad lineal

4.5.1. aceleración tangencial

Hasta este punto hemos expuesto como un objeto que se mueve alrededor de una circunferencia con rapidez constante presenta una aceleración radial, podemos avanzar y analizar el caso donde un objeto acelera de manera constante en dirección paralela a la velocidad instantánea y que denominaremos aceleración tangencial a_{tan}

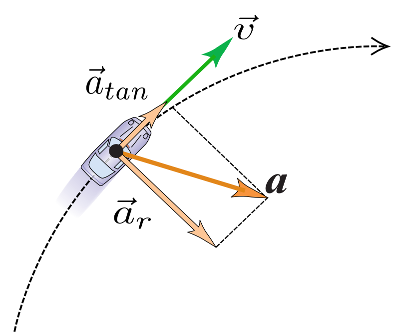


Figura 4.4: Automóvil con movimiento circular que aumenta la rapidez en una trayectoria curva

En la figura 4.4 un vehículo aumenta su rapidez en presenta dos aceleraciones un en dirección del cambio de la rapidez y otro perpendicular a la velocidad lineal

$$a_{tan} = \frac{\Delta v}{t} = \frac{\Delta(r\omega)}{t} = \frac{r\Delta\omega}{t} = r\alpha \tag{4.10}$$

Así, la aceleración tangencial de un punto sobre un objeto en rotación es igual a la distancia de ese punto al eje de rotación multiplicada por la aceleración angular.

$$a_{tan} = r\alpha \tag{4.11}$$

donde: a_{tan} = aceleración tangencial
r = radio
α = aceleración angular

La aceleración tangencial a_n es siempre perpendicular a la radial a_r este resultado indica que si queremos calcular la aceleración debemos sumar vectorialmente ambas aceleraciones$\vec{a} = \vec{a}_{tan} + \vec{a}_a$ y como son siempre perpendiculares la magnitud de la aceleración es igual a

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_r^2}$$

Ejemplo 4.5.1 Aceleración tangencial

Una rueda de 25.0 cm de radio gira a 120 rpm e incrementa de manera uniforme su frecuencia hasta 660 rpmen 9.00 s. Encuentre a) la aceleración angular constante en rad/s 2 y b) la aceleración tangencial de un punto en el borde.

SOLUCIÓN

El primer paso es transforma las de r.p.m a rad/s

$$\omega_0 = 120\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{\text{min}}{60\ \text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}}\right) = 4\pi\ \text{rad/s}$$

$$\omega_0 = 660\ \frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{\text{min}}{60\ \text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}}\right) = 22\pi\ \text{rad/s}$$

Procedemos a evaluar la aceleración angular

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_0}{t} = \frac{(22\pi\text{rad/s}) - (4\pi\ \text{rad/s})}{9\ \text{s}} = \frac{18\pi\text{rad/s}}{9\ \text{s}} = 2\pi\text{rad/s}^2 = 6.28\ \text{rad/s}^2$$

la aceleración tangencia

$$a_{tan} = 6.28\ \text{rad/s}^2(0.2\ \text{m}) = 1.57\ \text{m/s}^2$$

Ejemplo 4.5.2 Aceleración total

n auto de carreras acelera uniformemente de una velocidad de 40.0 m/s a otra de 60.0 m/s en 5.00 s mientras se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de una pista circular de radio 400 m. Cuando el auto alcanza una velocidad de 50.0 m/s, encuentre a) la magnitud de la aceleración centrípeta del auto, b) la velocidad angular,c) la magnitud de la aceleración tangencial y d) la magnitud de la aceleración total.

SOLUCIÓN

a)La aceleración centrípeta

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(5\ \text{m/s})^2}{400\ \text{m}} = 6.25\ \text{m/s}^2$$

b)Para encontrar la rapidez angular despejamos de $v = r\omega$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{50\ \text{m/s}}{400\ \text{m}} = 0.125\ \text{rad/s}$$

c) Para encontrar la magnitud de la aceleración tangencial

$$a_t = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{(6\ \text{m/s} - 4\ \text{m/s})}{5\ \text{s}} = 4\ \text{m/s}^2$$

d)Se encuentra la magnitud de la aceleración total.

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_{tan}^2} = \sqrt{(6.25\ \mathrm{m/s^2})^2 + (4\ \mathrm{m/s^2})^2} = 7.42\ \mathrm{m/s^2}$$

Lineal	Tipo	De rotación	Relación
x	desplazamiento	θ	$x = r\theta$
v	velocidad	ω	$v = r\omega$
a_{tan}	aceleración	α	$a_{tan} = r\alpha$

Tabla 4.2: Relación entre cantidades lineales y de rotación

velocidad angular

Aceleración angular

1. Un cable está enrollado en tomo de un carrete de 80 cm de diámetro. ¿Cuántas revoluciones de este carrete se requieren para que un objeto atado al cable recorra una distancia rectilínea de 2 m? ¿Cuál es el desplazamiento angular?
   Resp. 0.796 rev, 5 rad

2. Un motor de automóvil frena desde 4500 rpm hasta 120 rpm en 2.5 s. Calcule a) su aceleración angular, que se supone constante, y b) el número total de revoluciones que da el motor en este tiempo.
   Resp $\alpha = -183.46$ rad/s^2, $\theta = 96.25$ rev

3. La centrífuga de secado de una lavadora que gira a 900 rpm frena uniformemente a 300 rpm mientras efectúa 50 revoluciones. Calcule a) la aceleración angular y b) el tiempo requerido para completar las 50 revoluciones.
   Resp. $\alpha = -4\pi$ rad/s^2, $t = 5$s

4. Un punto localizado en el borde de una gran rueda cuyo radio es 3 m se mueve en un ángulo de 31°. Halle la longitud del arco descrito por ese punto.
   Resp 1.94 m

5. Una polea de 320 mm de diámetro gira inicialmente a 4 rev/s y luego recibe una aceleración angular constante de 2 rad/s^2. ¿Cuál es la velocidad tangencial de una correa montada en dicha polea, alcabo de 8 s? ¿Cuál es la aceleración tangencial de la correa?
   Resp. $\omega = 6.58$ rad/s, $a = 0.320$ m/s^2

6. Una rueda de 15.0 cm de radio parte del reposo y completa 2.00 revoluciones en 3.00 s. (a) ¿Cuál es la velocidad angular media en radianes por segundo? (b) ¿Cuál es la velocidad tangencial final de un punto situado en el borde de la rueda? ***Resp***. $\omega = 4.18$ rad/s, $a = 0.21$ m/s^2

7. Una rueda de 70 cm de diámetro acelera uniformemente en torno a su centro, desde 130 rpm hasta 280 rpm, en 4.0 s. Determine a) su aceleración angular y b) los componentes radial y tangencial de la aceleración total lineal de un punto en el extremo de la rueda 2.0 s después de que comenzó a acelerar. ***Resp***. $a_r = 25088$m/s^2, $a_{tan} = 12$ m/s^2

8. a) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un insecto posado en el borde de un disco de 10.0 in de diámetro, si el disco se mueve desde el reposo con una velocidad angular de 78.0 rev/min en 3.00 s? b) Cuando el disco alcanza su velocidad final,c) ¿cuál es la velocidad tangencial del insecto? Un segundo después que el insecto arranca desde el reposo, ¿cuáles son sus aceleraciones, c)tangencial, d) centrípeta y e) total
   Resp.a) 0.346 m/s^2 b) 1.04 m/s c) 0.346m/s^2 d) 0.943 m/s^2 e) 1.00 m/s^2 a 20.1° adelante con respecto a la dirección de a_r

Capítulo 5

Cuerpo rígido

En mecánica podemos vaticinar el comportamiento de cuerpos que exhiben movimientos de translación, sólo se examina la la trayectoria del centro de masa y las fuerza que lo afectan, esto facilitan los cálculos sin embargo vemos la frontera de esta forma de tratar a los cuerpos cuando estos objetos giran o rotan y se trasladan, Las observaciones y los experimentos muestran que se debe considerar la forma del objeto y la manera en que la masa se distribuyen dentro del objeto. en estas situaciones veremos a los sólidos constituido por un ingente número de partículas, y lo llamaremos **cuerpo rígido**

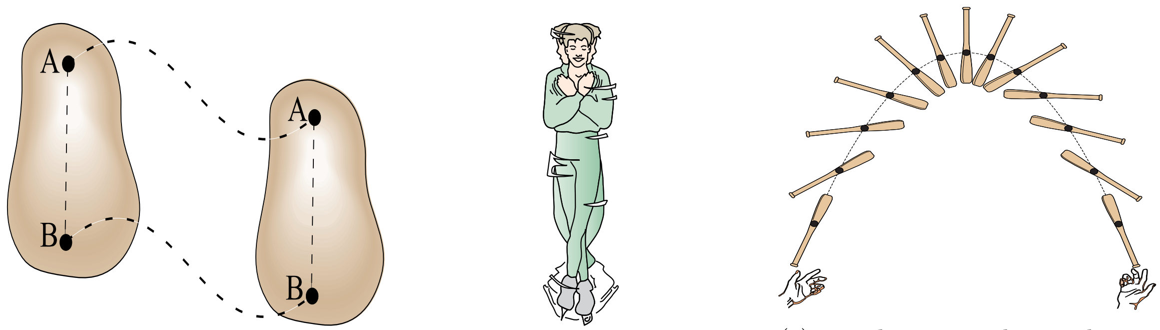
Un cuerpo rígido es un objeto o sistema de partículas en el que las distancias entre partículas son fijas (y constantes) y al trasladarse y rotar esa distancia no cambia

.

"El concepto de cuerpo rígido es una idealización. En realidad, las partículas (átomos y moléculas) de un sólido vibran constantemente. Además, los sólidos pueden sufrir deformaciones No obstante, la mayoría de los sólidos pueden considerarse cuerpos rígidos para el análisis del movimiento rotacional" (Wilson y Buffa, 2007)ver pag.257

5.1. Movimiento de rotación y traslación

Hasta este punto solo se ha hecho una disquisición de la dinámica rotativo de un cuerpo sólido que se supone indeformable , este tipo de exposición es incompleta si no se considera el caso en que un cuerpo presenta un movimiento simultáneo de rotación y traslación



(a) Movimiento de traslación (b) movimiento de rotación (c) combinación de traslación más rotación

Figura 5.1: Posible movimientos de un cuerpo

La **traslación** de un cuerpo rígido es aquella donde el objeto no gira con respecto a un marco de referencia y cada punto de este objeto tiene la misma velocidad y aceleración, por lo que el movimiento del objeto está completamente descrito por el desplazamiento de un solo punto o centro de masa

La **rotación** de un cuerpo rígido respecto a un punto fijo es aquella donde los puntos del eje de rotación están fijos y cada punto fuera de esta linea se mueven con una trayectoria circular mientras el cuerpo rígido gira.

5.2. Momento de inercia de cuerpo rígido

El momento de inercia representa la dificultad de hacer girar o de detener el giro es decir cambiar la rotación de un objeto y es análogo a la masa, la cual siempre se opone a que una fuerza cambie su movimiento. El momento de inercia se describe matemáticamente por la expresión 5.1

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{5.1}$$

El momento de inercia se relaciona con la masa pero depende de cómo se distribuye esa masa en el objeto, Cuanto más alejado esté esa masa del eje de rotación mayor será el momento de inercia del cuerpo

Ejemplo 5.2.1 Inercia de partículas en rotación

Cuatro masas están sostenidos en los vértices de un cuadrado por varillas ligeras como se ve en la figura 5.2 Encuentre el momento de inercia del sistema en relación, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 30$ g

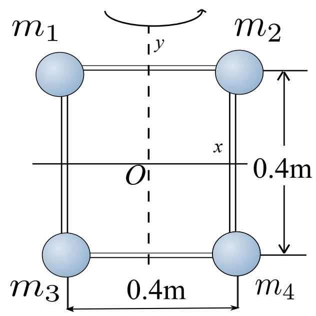


Figura 5.2

SOLUCIÓN

La distancia r del centro O a cualquier punto es la misma, usando teorema de Pitágoras podemos obtner esa distancia al cuadardo

$$r^2 = 0.2^2 \text{ m} + 0.2^2 \text{ m} = 0.08 \text{ m}^2$$

Como son partículas individuales por lo que se usa la ecuación

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + m_4r_4^2 = 4mr^2$$
$$I = 4(0.03 \text{ kg})(0.08 \text{ m}^2) = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

5.3. Energía cinética rotacional

Todo objeto sólido que gira con respecto a un punto posee una energía cinética de rotación, Este objeto está formado por todas las concentraciones de masa, cada una de estas partículas lleva la misma velocidad angular pro no la misma velocidad tangencial ya que la distancia de estas unidades de masa está separada del punto de origen por diferentes distancias que denotaremos por r_n, la energía cinética de una partícula se expresa por

$$E_k = \frac{1}{2}v_T^2$$

sabemos que la relación entre la velocidad línea y tangencial está dada por $v_T = \omega r$ de así podemos escribir la energía cinética de una porción de masa como

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega r^2$$

ya que este sólido se puede considerar como un conjunto de masas individuales. la energía cinética del objeto es igual a la suma de cada energía de cara porción de masa

$$E_k = \frac{1}{2}m_1r_1^2\omega^2 + \frac{1}{2}m_2r_1^2\omega^2 + \cdots = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2 \tag{5.2}$$

la ecuación 5.2 se puede simplificar de esta manera llegamos a

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_1^2 + \cdots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2\right)\omega^2$$

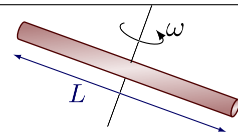
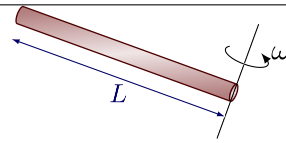
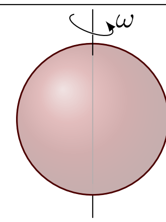
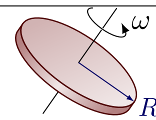
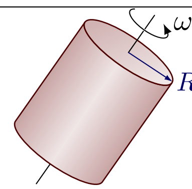
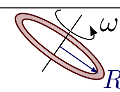
Objeto	Ubicación del eje		Momento de inercia
Barra uniforme larga	A través del centro		$\frac{1}{12}ML^2$
Barra uniforme larga	A través de un extremo		$\frac{1}{3}ML^2$
Esfera Uniforme	A través del centro		$\frac{2}{5}MR^2$
Disco delgado	A través del centro		$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro sólido	A través del centro		$\frac{1}{2}MR^2$
Aro delgado	A través del centro		MR^2

Tabla 5.1: Momentos de inercia para cuerpos de composición uniforme

y finalmente podemos decir que la energía cinética de rotación es igual a

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2} \tag{5.3}$$

Ejemplo 5.3.1 Energía cinética de rotación

Un rotor centrífugo tiene un momento de inercia de 3.75×10^{-2} kg m^2 . ¿Cuánta energía se requiere para llevarlo desde el reposo hasta 8250 rpm?

SOLUCIÓN

La primera parte consiste en pasar de r.p.m a rad/s

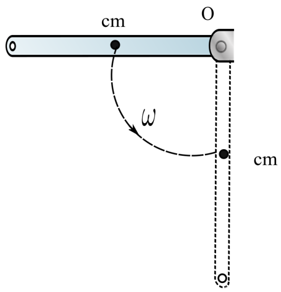
$$\omega = 8250\frac{\text{rev}}{\text{min}}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{\text{min}}{60\ \text{s}}\right) = 863.93\ \text{rad/s}$$

La energía cinética de rotación se consigue con la ecuación 5.2

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(3.75 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg\,m^2})(863.93\ \mathrm{rad/s})^2}{2} = 13.9 \times 10^3\ \mathrm{J} = 14\ \mathrm{kJ}$$

Ejemplo 5.3.2 Energía cinética de rotación de una barra

La varilla en la figura es de un metro. Está articulado en el punto O de tal manera que puede dar vueltas en un plano vertical. Se sostiene horizontalmente y después se suelta. Calcule la rapidez angular de la varilla y la rapidez lineal de su extremo libre cuando alcance la posición vertical



SOLUCIÓN

Cuando la barra cae la energía potencial disminuye, y la cinética aumenta, no existe movimiento de translación sólo de rotación y lo que nos interesa es conocer es la velocidad angular del centro de masa colocado a la mitad de la barra, el valor de la inercia $I = 1/3ML^2$ se encuentra en la tabla **??**. aplicaremos la conservación de la energía para relacionar la energía mecánica inicial y final:

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + mgh_i$$

como parte del reposo $\omega_i = 0$ y la altura final debe ser cero hacemos $h = L\operatorname{sen}\theta/2$, $I = 1/3ML^2$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 = mgh_i$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\right)\omega_f^2 = mg\frac{L}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3(9.8\ \mathrm{m/s^2})}{1\mathrm{m}}} = 5.42\ \mathrm{rad/s}$$

la velocidad tangencial en el extremo de la regla

$$v = \omega r = 5.045\ \mathrm{rad/s}(1\ \mathrm{m}) = 5.42\ \mathrm{m/s}$$

5.3.1. Energía cinética total

Para un objeto que está en traslación y rotación, la energía cinética total es la suma de la energía cinética de traslación del centro de masa del objeto más su energía cinética de rotación en torno a su centro de masa Por ejemplo una bola que rueda en un plano inclinado.

$$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \tag{5.4}$$

donde v_CM es la velocidad lineal del centro de masa, I_CM es el momento de inercia en torno a un eje a través del centro de masa, ω es la velocidad angular en torno a este eje, y m es la masa total del objeto.

Ejemplo 5.3.3 Energía cinética total

Un disco sólido de 20 kg ($I = 1/2mr^2$) rueda sobre una superficie horizontal a razón de 4.0 m/s. Determine su E_k total.

SOLUCIÓN

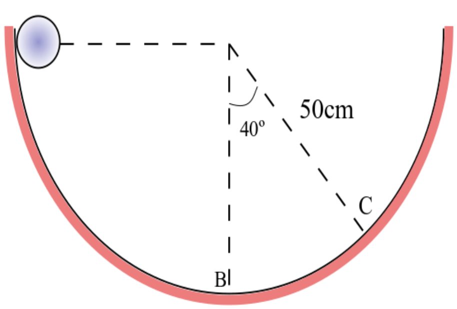
La energía cinética total se obtiene de la suma de las energías de translación, y de rotación

$$\begin{aligned} E_{total} &= E_{translacion} + E_{rotacion} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mr^2v^2}{4r^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \end{aligned}$$

$$E_{total} = \frac{3}{4}(20 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 = 240 \text{ J}$$

Ejemplo 5.3.4 Energía cinética de rotación y translación

Una pequeña bola sólida $I = 2mr^2/5$ rueda sin resbalar sobre la superficie interior de una semiesfera, como se muestra en la figura (la bola es mucho más pequeña de lo que se muestra). Si la bola se deja caer en el punto A, ¿con qué rapidez se moverá cuando pase por a) el punto B y b) el punto C?



SOLUCIÓN

AL velocidad se obtiene al hacer uso del teorema del trabajo y la energía. bola presenta un movimiento de rotación y uno de traslación, esto significa el uso de ambas contribuciones. la fricción es mínima entre la bola y la superficie

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mgh_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 + mgh_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 = mgh_i$$

La expresión anterior aparecen inercia, y velocidad angular, par expresa todo en términos de masa y rapidez tangencia sustituimos $\omega = v/r$, e $I = 2mr^2/5$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v_f}{r}\right)^2 = mgh_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{2mr^2v_f^2}{2(5r^2)} = mgh_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{5}mv_f^2 = mgh_i$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)v_f^2 m = mgh_i$$

$$v_f^2 = \frac{10mgh_i}{7m}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10(9.8\ \mathrm{m/s^2})(0.5\mathrm{m})}{7}} = 2.65\ \mathrm{m/s}$$

Para la parte B del ejercicios igualamos $h_i - hf = h\cos\theta$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mgh_f = mgh_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{5}mv_f^2 = mg(h_i - h_f)$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{5}mv_f^2 = mgh\cos\theta$$

$$v_f^2 = \frac{10gh\cos\theta}{7}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10(9.8\ \mathrm{m/s^2})(0.5\mathrm{m})\cos 40°}{7}} = 2.26\ \mathrm{m/s}$$

5.4. Segunda ley del movimiento en la rotación

Si queremos destapar un frasco o apretar una tuerca debemos hacerlos girar, esto se logra aplicando una fuerza tangencial sobre el cuerpo. Esta fuerza tangencial crea una torca $\tau = Fr$, que afecta a cada elemento de masa del sólido provocando una aceleración en cada elemento de masa que compone al objeto, Nuestra meta encontrar una relación entre la aceleración angular y la torca aplicada Usaremos la segunda ley de Newton

$$F = ma_T \tag{5.5}$$

donde a_T es la aceleración tangencial y $a_T = \alpha r$ la ecuación 5.5 se reescribe como

$$F = m\alpha r \tag{5.6}$$

al multiplicar ambos lados por r la relación 5.6 para un solo elemento de masa

$$Fr = m\alpha r^2$$

Esta expresión es la torca para un único elemento de masa

$$\tau = (mr^2)\alpha$$

y ahora encontraremos todas la contribución de cada partícula a la torca

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots = m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \right) \alpha$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \tau_i = I\alpha} \tag{5.7}$$

Segunda ley de Newton rotacional

Dice que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular

Ejemplo 5.4.1 caja que cae y desenrrolla un cable

Un bloque de masa m cuelga de una cuerda que pasa por una polea sin fricción, con forma de disco, de masa M y radio R, como se muestra en la N figura 5.3 . Si el bloque desciende desde el reposo bajo la influencia de la gravedad, ¿qué magnitud tendrá su aceleración lineal? (Desprecie la masa de la cuerda.)

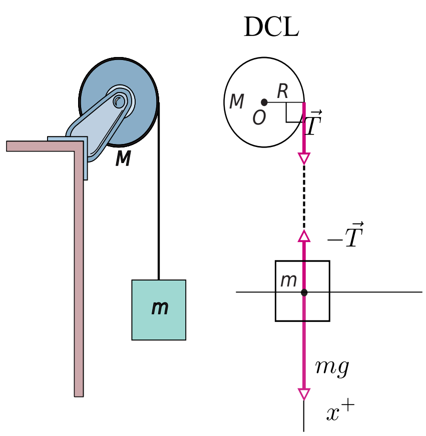


Figura 5.3

SOLUCIÓN

La polea tiene una masa M y a este polea se le aplica segunda ley de Newton rotacional

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

$$RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

la aceleración del cable es igual a la aceración tangencial $\alpha = a/R$ usamos esto para sustituir α

$$TR = \frac{MR^2}{2}\frac{a}{R}$$

$$T = \frac{MR^2a}{2R^2} = \frac{1}{2}Ma$$

La segunda ley de Newton de traslación aplicada al bloque

$$\Sigma F = ma$$

$$mg - T = ma$$

$$mg - \frac{1}{2}Ma = ma$$

$$ma + \frac{1}{2}Ma = mg$$

$$a(m + \frac{1}{2}M) = mg$$

$$a = \frac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$$

Ejemplo 5.4.2 aceleración de una bola que rueda sin resbalar

Una bola sólida rueda sin resbalar por un rampa forma un ángulo θ con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta? Trate la bola como esfera sólida

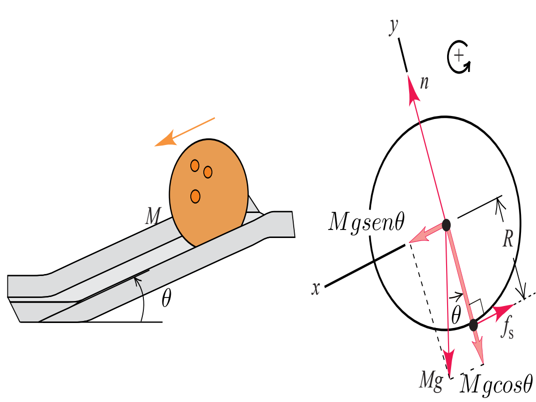


Figura 5.4

SOLUCIÓN

de la tabla **??** vemos el momento de inercia para la esfera solida es $I = mR^2/5$ Las ecuaciones para el movimiento de rotación y traslación son

$$\Sigma\tau = I\alpha$$

lo que resulta en

$$fR = \frac{2MR^2}{5}\alpha \tag{5.8}$$

como la bola rueda sin resbalar se usa $a = R\alpha$ y 5.8 queda como

$$fR = \frac{2MR^2}{5}\frac{a}{R}$$

$$f = \frac{2MR^2a}{5R^2} = \frac{2Ma}{5}$$

$$\Sigma F = ma$$

$$Mg\operatorname{sen}\theta - f = Ma$$

Sustituimos el valor f por $\frac{2Ma}{5}$

$$Ma + \frac{2}{5}Ma = Mg\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{7}{5}Ma = Mg\operatorname{sen}\theta$$

$$a = \frac{5}{7}g\operatorname{sen}\theta$$

5.5. Cantidad de movimiento angular

Cualquier objeto u objetos que giran se mantendrán rotando sin importar su tamaño ya que poseen una inercia de rotación o **cantidad de movimiento rotacional** esto objeto pueden ser inmensos como galaxia o microscópicos como átomos, podemos definir esta inercia rotacional como el producto de la inercia de rotación por la velocidad de rotación.

$$L = I\omega \tag{5.9}$$

5.5.1. Conservación de la cantidad de movimiento angular

La ley de conservación del momento angular es uno de los fundamentos de la física y al igual que la cantidad de movimiento lineal este se conserva siempre que no existan torcas externas que alteren la rotación. Esta regla se aplica a cualquier objeto que rote ya sean galaxias, planetas, Podemos tomar por ejemplo a una patinadora que gira con los brazos extendidos, en el momento que recoge los brazos , su rapidez angular aumenta , porque su inercia se redujo y la cantidad de movimiento angular se conservó 5.5

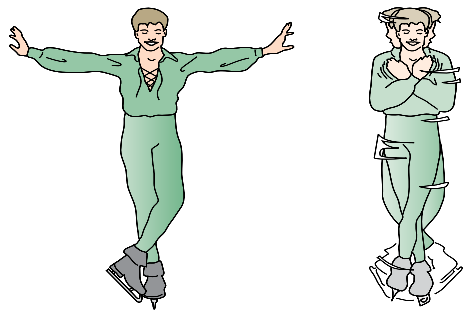


Figura 5.5: Cuando el patinador junta los brazos a su cuerpo,disminuye su inercia rotacional I y aumenta su rapidez rotacional ω.

Conservación del momento angular

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.5.1 Cantidad de movimiento angular

¿Cuál es la cantidad de movimiento angular de una bola de 0.210 kg que gira sobre el extremo de una delgada cuerda en un círculo de 1.10 m de radio y una rapidez angular de 10.4 rad/s?

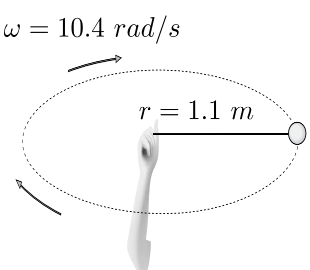


Figura 5.6

SOLUCIÓN

$$L = I = r^2 m\omega = (1.1\ \text{m})(0.21\ \text{kg})(10.4\ \text{rad/s}) = 2.64\ \text{kgm}^2/\text{s}$$

Ejemplo 5.5.2 Conservación momento angular

Un estudiante se sienta en un taburete giratorio mientras levanta un par de pesas. El taburete rota libremente alrededor de un eje vertical con fricción despreciable. El momento de inercia del estudiante, las pesas y el taburete es 2.25 kgm^2 El estudiante está en rotación con los brazos extendidos, dando una vuelta completa cada 1.26 s. a) ¿Cuál es la rapidez angular inicial del sistema? b) Mientras él rota jala las pesas hacia su pecho de modo que el nuevo momento de inercia del sistema (estudiante, pesas y taburete) se convierta en 1.80 kgm^2 . ¿Cuál es la nueva rapidez angular del sistema?

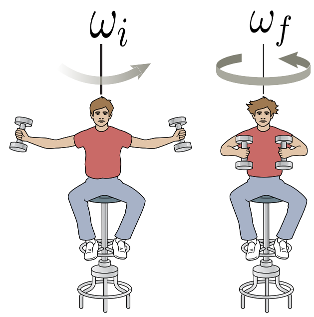


Figura 5.7

SOLUCIÓN

El estudiante da una vuelta completa es decir 2πrad en 1.26 así la velocidad angular inicial igual a

$$\omega_i = \frac{2\pi \text{ rad}}{1.26 \text{ s}} = 4.98 \text{ rad/s}$$

como el estudiante encoje los brazos la velocidad angular se incrementa, pero la cantidad de movimiento angular se conserva

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

$$\omega = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{2.25 \text{ kgm}^2}{1.8 \text{ kgm}^2}(4.98 \text{ rad/s}) = 6.22 \text{ rad/s}$$

Ejemplo 5.5.3 Conservación Cantidad de movimiento angular

Un disco uniforme da vueltas a 2.4 rev/s alrededor de un perno sin fricción. Una barra no rotatoria, de la misma masa que el disco y longitud igual al diámetro del disco, se suelta sobre el disco que gira libremente Entonces ambos dan vueltas alrededor del perno con sus centros superpuestos. ¿Cuál es la frecuencia angular en rev/s de la combinación?

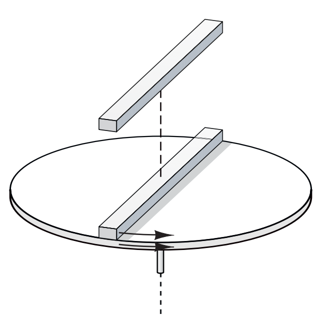


Figura 5.8

SOLUCIÓN

$$\underbrace{I_1\omega_1}_{\text{Cantidad de movimiento incial}} = \overbrace{I_1\omega_2 + I_2\omega_2}^{\text{Cantidad de movimiento final}}$$

Los valores de los momentos de inercia, del disco delgado y de la barra son $I = 1/2M_1R^2$ y $I_2 = 1/12LM^2$ como la barra va a girar a través del centro hacemos $L = 2R$ así $I_2 = 1/6RM$ y después hacer la suma además se conoce que $M_1 = M_2$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{6}MR^2 = \frac{2}{3}MR^2$$

$$I_1\omega_2 + I_2\omega_2 = I_1\omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$$

$$\omega_2 = \omega_1\frac{\frac{MR^2}{2}}{\frac{2MR^2}{3}} = \frac{3}{4}\omega_1 = \frac{3}{4}(2.4 \text{ rev/s}) = 1.9 \text{ rev/s}$$

Ejemplo 5.5.4 Conservación de la cantidad de movimiento angular

Una persona de 75 kg de masa está de pie en el centro de una plataforma giratoria en rotación, de 3.0 m de radio y momento de inercia 920 kg/m^2 . La plataforma gira sin fricción con velocidad angular de 2.0 rad/s. La persona camina radialmente hacia el extremo de la plataforma. a) Calcule la velocidad angular cuando la persona alcanza el extremo. b) Calcule la energía cinética de rotación del sistema constituido por la plataforma y la persona antes y después de que ésta camine

SOLUCIÓN

el momento de inercia inicial de sistema $I_i = 920$ kgm^2 incluida la persona al centro del carrusel, Cuando la persona camina hacia uno de los extremos esta posee un momento de inercia $I_p = mr^2 = (75 \text{ kg})(3 \text{ m})^2 = 675 \text{ kgm}^2$

el momento de inercia final e igual a la suma de ambos momentos el de la rueda y el de la persona,

$$I_f = I_i + I_p = 920 \text{ kgm}^2 + 675 \text{ kgm}^2 = 1595 \text{ kgm}^2$$

y finalmente aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento angular

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

$$\omega_f = \frac{I_i\omega_i}{I_f} = \frac{920 \text{ kgm}^2}{1595 \text{ kgm}^2}(2 \text{ rad/s}) = 1.15 \text{ rad/s}$$

Las energía cinética de rotación inicial y final son:

$$E_{ki} = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{(920 \text{ kgm}^2)(2\text{rad/s})^2}{2} = 1840 \text{ J}$$

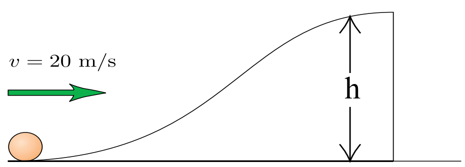
$$E_{kf} = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{(1595 \text{ kgm}^2)(1.15\text{rad/s})^2}{2} = 1054 \text{ J}$$

Dinámica del cuerpo rígido

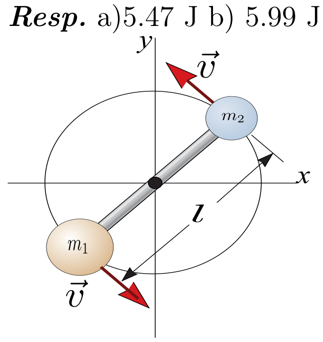
Energía cinética de rotación

1. Una bola de boliche de 7.3 kg de masa y 9.0 cm de radio rueda sin deslizar por un carril de la pista a 3.3 m/s. Calcule su energía cinética total.
   Resp. a)56 J

2. Como se muestra en la figura , una esfera sólida uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s y luego rueda hacia arriba sobre un plano inclinado. Si las pérdidas debidas a la fricción son despreciables, ¿cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene la esfera?
   Resp. $h = 29$m



3. Una varilla ligera de 1m de longitud rota alrededor de un eje perpendicular a su longitud y que pasa a través de su centro como se ve en la figura Dos partículas de masas 4.00 kg y 3.00 kg están conectadas en los extremos de la varilla. a) Despreciando la masa de la varilla, ¿cuál es la energía cinética del sistema cuando su rapidez angular es de 2.50 rad/s? b) Repita el problema, suponiendo que la masa de la varilla es de 2.00 kg.
   Resp. a)5.47 J b) 5.99 J



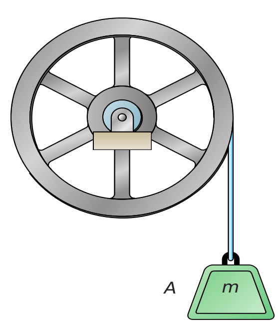
4. Considere un plano inclinado de 16 m de altura. Cuatro objetos de diferentes materiales tienen la misma masa de 3 kg: Un aro circular, un disco, una esfera y una caja. Suponga que la fricción es insignificante para la caja, pero hay suficiente fricción para que los objetos rodantes rueden sin deslizarse. Al calcular las velocidades finales en cada caso, determine el orden en el cual llegan al punto más bajo del plano
   Resp. $v_c = 17.7$ m/s. $v_e = 14.97$ m/s, $v_d = 14.46$m/s, $v_a = 12.5$ m/s

Segunda ley de Newton rotacional

5. Una cuerda que está enrollada en un carrete circular de 5 kg permite arrastrar objetos con una tensión de 400 N. Si el radio del carrete es de 20 cm y puede girar libremente sobre su eje central, ¿cuál es la aceleración angular?
   Resp. 800 rad/s^2

6. Un disco rectificador de 8 kg tiene 60 cm de diámetro y gira a 600 rev/min. ¿Qué fuerza de frenado se deberá aplicar tangencialmente al disco para detener su movimiento de rotación en 5 s?
   Resp.15.1 N

7. Para determinar el momento de inercia de la masa de un volante de 600 mm de radio, se une un bloque de 12 kg a un alambre que está enrollado alrededor del volante. Se suelta el bloque y se observa que desciende 3 m en 4.6 s. determine el momento de inercia de la masa del volante
   Resp. $I = 145.01$ kgm^2

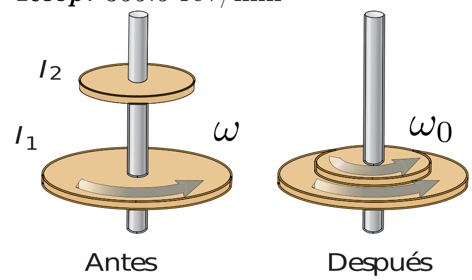


Conservación de la cantidad de movimiento angula

8. Cuál es la cantidad de movimiento angular de una patinadora de figura que gira a 3.5 rev/s con los brazos muy cerca del tronco, si se le considera como un cilindro uniforme con una altura de 1.5 m, un radio de 15 cm y una masa de 55 kg? b) ¿Cuánta torca se requiere para frenarla hasta el al- to en 5.0 s, suponiendo que ella no mueve los brazos? ***Resp.*** $L = 13.61$ kgm^2/s, $\tau = 2.72$ Nm

9. Una estrella de neutrones se forma cuando colapsa un objeto como el Sol. Suponga que una estrella esférica uniforme de masa M y radio R colapsa en una esfera uniforme de radio 1×10^{-5} R. Si la estrella original tenía una tasa de rotación de 1 rev cada 25 días (como el Sol), ¿cuál será la tasa de rotación de la estrella de neutrones? ***REsp*** 5×10^3 rev/s.

10. un disco A de 6 kg, que gira en el sentido de las manecillas del reloj a 400 rev/min,se acopla a un disco B de 3 kg que inicialmente es taba en reposo. El radio del disco A es de 0.4 m, y el radio del disco B es de 0.2 m. ¿Cuál es la rapidez angular combinada después de que los dos discos se acoplan? ***Resp.*** 355.5 rev/min



Unidad II.
Sistemas
Fluidos

Capítulo 6

Fluidos

En esta sección nos enfocaremos al estudio de los fluidos, primero exploraremos las propiedades de estos cuando se encuentran en reposo para después explicar su comportamiento en un estado de movimiento.

Los fluidos están en todas partes; en el aire que respiramos, en el agua que bebemos, en la sangre que circula en nuestra venas, todos esto entro muchos ejemplos, de fluidos. a pesar de ser omnipresentes pocas veces reparamos en sus propiedades.

La pregunta sería si están en todas partes, ¿Cómo reconocer un fluido?. bueno los fluidos son de dos tipos líquidos y gaseosos. Los **líquidos** no conservan una forma fija , y si se les confina en un recipiente, tenderán a llenarlo desde el fondo, o dicho de otra manera tomará la forma del recipiente que los contenga. A nivel molecular las moléculas de los líquidos forman enlaces de corta duración que se interrumpen debido a la energía cinética de las mismas moléculas.

Por otro lado los **gases** no tienen forma y al ser encerrado en algún recipiente llenaran todo el volumen de su contenedor. en una escala microscópica las moléculas están muy alejadas entre sí e interaccionan muy poco.

Ambos líquidos y gases presenta una tendencia a fluir es decir si les aplica una fuerza pequeña se moverán

6.1. Densidad

Supongamos que tenemos dos cubos ambos del mismo volumen pero de diferentes masa,por ejemplo uno de hierro y otro de aluminio, sabemos que el bloque de hierro es más pesado o en palabras más propias es más difícil de mover, esto se debe a una propiedad de los materiales la llamad densidad, la cual mide, la cantidad de materia contenida en un volumen dado

$$\rho = \frac{\text{masa del cuerpo}}{\text{volumen del cuerpo}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \tag{6.1}$$

La densidad no es una cantidad universal, esta es afectada por la temperatura y la presión. En sólidos y líquidos existe poco cambio de dilatación con la temperatura ,y la densidad se mantiene casi constante, Sin embargo en los gases su densidad depende de la temperatura y de la presión. Existen tablas de densidades que se tabula a presión de una atmósfera y 0°C

Densidad de las sustancias	
Sustancia	$\rho(\mathbf{kg/m^3})$
Aluminio	2.70×10^3
Hierro y acero	7.8×10^3
Cobre	8.9×10^3
Plomo	11.3×10^3
Oro	19.3×10^3
Agua	1×10^3
Mercurio	13.6×10^3
Alcohol, etílico	0.79
Aire	1.29
Helio	0.179

Tabla 6.1: Densidades de sustancias a 0° y presión atm

Ejemplo 6.1.1 densidad

Calcule la masa de un cubo de aluminio que tiene 5.00 cm por lado. La densidad del aluminio es de 2700 $\mathrm{kg/m^3}$.

SOLUCIÓN

El primer paso es obtener el volumen del cubo cada arista a=5 cm por lo que el volumen es igual a $V = a^3$

$$V = (0.05\ \mathrm{m})^3 = 1.25 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$$

lo siguiente es usar la formula expresión de la densidad y despejar el valor de m

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \rho V = (2700\ \mathrm{kg/m^3})(1.24 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3}) = 0.3375\ \mathrm{kg}$$

Ejemplo 6.1.2 densidad

Para determinar el radio interno de un tubo capilar uniforme, el tubo se llena con mercurio. Se encontró que una columna de mercurio de 2.375 cm de largo tiene una masa de 0.24 g. ¿Cuál es el radio interno r del tubo? La densidad del mercurio es de 13600 $\mathrm{kg/m^3}$, y el volumen de un cilindro circular recto es $V = \pi r^2 h$

SOLUCIÓN

Al ser un capilar debemos suponer un radio muy pequeño por lo que es conveniente con unidades pequeñas pasaremos la densidad del mercurio a $\mathrm{gr/cm^3}$

$$\rho = \left(\frac{13600\ \mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(\frac{1000\ \mathrm{gr}}{\mathrm{kg}}\right)\left(\frac{\mathrm{m}^3}{1 \times 10^6\ \mathrm{cm}^3}\right) = 13.6\ \mathrm{cm^3/gr}$$

Pa después usar la formula de densidad $\rho = m/V$ y despejamos a al volumen, por lo que volumen queda.

$$V = \frac{m}{\rho}$$

además sabemos que $V = \pi r^2 h$ así que igualamos ambas expresiones y despejamos el radio

$$\pi r^2 h = \frac{m}{\rho}$$

$$r^2 = \frac{m}{\mu\rho h}$$

$$r = \sqrt{\frac{m}{\mu\rho h}} = \sqrt{\frac{0.24 \text{ gr}}{\pi(13.6 \text{ gr/cm}^3)(2.373 \text{ cm})}} = 0.048 \text{ cm} = 0.48 \text{ mm}$$

6.2. Presión

En nuestra vida cotidiana tenemos contacto con el concepto de presión como por ejemplo: al inflar neumáticos, lanchas inflables, balones, etc. Además cuando buceamos o cuando volamos sentimos la presión en nuestros tímpanos. También oímos a los meteorólogos hablar de la presión atmosférica y de sus consecuencias en el clima. De igual manera hemos utilizado botes en aerosol a presión, en el cual si este es perforado el fluido escapara, eso implica que el fluido ejerce una fuerza sobre las paredes del contenedor. A esta fuerza que ejerce el fluido por unidad de área se le denomina presión P:

$$\text{Presión promedio} = \frac{\text{fuerza que actúa en un área}}{\text{área sobre la que se distribuye la fuerza}}$$

$$\boxed{P = \frac{F}{A}} \tag{6.2}$$

Dado que en el Sistema Internacional la unidad de fuerza es el newton (N) y la de superficie es el metro cuadrado , la unidad resultante para la presión es el newton por metro cuadrado que recibe el nombre de pascal (Pa).

Otra unidad muy utilizada para medir la presión, aunque no pertenece al Sistema Internacional, es el milímetro de mercurio (mm Hg) que representa una presión equivalente al peso de una columna de mercurio de 1 mm de altura. Esta unidad está relacionada con la experiencia de Torricelli que encontró, utilizando un barómetro de mercurio, que al nivel del mar la presión atmosférica era equivalente a la ejercida por una columna de mercurio de 760 mm de altura.

Ejemplo 6.2.1 Presión

Un acróbata de 60 kg realiza un acto de equilibrio sobre un bastón. El extremo del bastón, en contacto con el piso, tiene un área de 0.92 cm^2 . Calcule la presión que el bastón ejerce sobre el piso (desprecie el peso del bastón)

SOLUCIÓN

los pasos a segur son:expresar el área en unidad de SI , dos, considerar la fuerza que se ejerce sobre al base del basto igual al peso del acróbata $F = m_{\text{acróbata}}g$

$$(0.92 \text{ cm}^2)\left(\frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}}\right)^2 = 92 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{(60 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{92 \times 10^{-6} \text{ m}^2} = 6.39 \times 10^6 \text{ Pa}$$

6.2.1. Presión en fluidos

La presión hidrostática, es la que se manifiesta en el interior de toda masa líquida, provocada por el peso de la columna de líquido que debe soportar un cuerpo sumergido. La propiedades de la presión es en un recipiente son las siguientes:

- La presión del interior de un líquido actúa en todas las direcciones
- La presión es más alta cuanto mayor sea la profundidad
- La presión es mayor cuanto mayor sea la densidad del líquido
- La presión en un punto en un fluido en equilibrio estático depende de la profundidad del punto, pero no esta en función, del ancho del recipiente es decir no depende de la forma del contenedor como se muestra en la **figura 6.1**

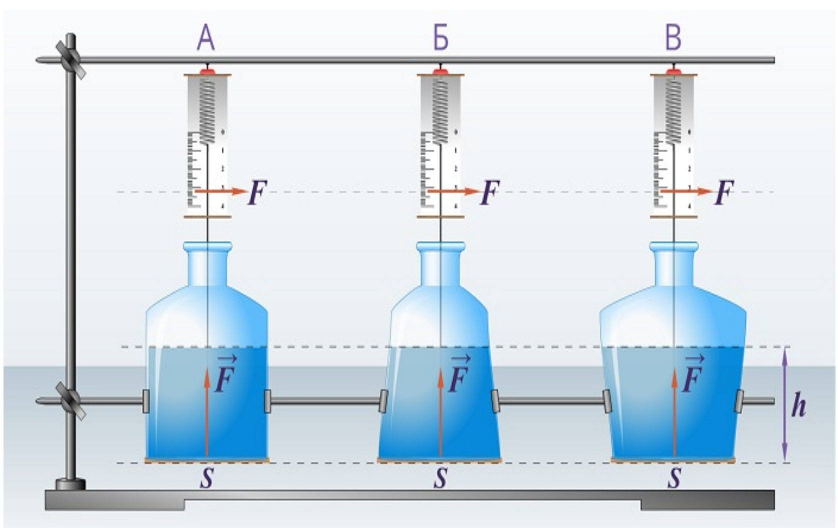


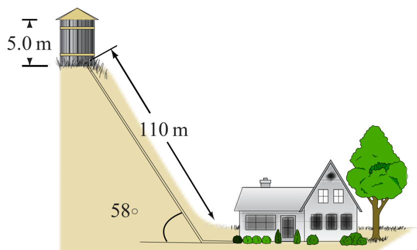
Figura 6.1: paradoja hidrostática. La presión es la misma en todas la partes que se hallan a la misma profundidad

$$P = \rho g h \tag{6.3}$$

donde: P = presión
ρ = densidad
g = aceleración de la gravedad
h = altura

Ejemplo 6.2.2 Presión hidrostática

Una casa en el fondo de una colina se abastece mediante un tanque lleno de agua de 5.0 m de profundidad, el cual está conectado a la casa por un tubo de 110 m de longitud que forma un ángulo de 58° con la horizontal a) Determine la presión manométrica del agua en la casa. b) ¿Qué tan alto se elevaría el agua si saliera verticalmente de una tubería 5.0 m rota enfrente de la casa?



SOLUCIÓN

Para solucionar el ejercicio debemos recordar, que la presión se ejerce de manera vertical así que se debe calcular la altura del tanque con respecta a al casa po lo que $h = h_{tanque} + y$

Así la presión es

$$P = \rho g h = (1000\text{kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(98.28 \text{ m}) = 0.96 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 0.96 \text{ MPa}$$

6.2.2. Presión atmosférica

La superficie terrestre es la parte baja de un océano de gases de diferentes tipos, al que conocemos como atmósfera. debido a su composición heterogénea es difícil mensurar su densidad, y presión ya que esta varía ligeramente en diferentes lugares además que depende del clima y la estación del año, sin embargo podemos decir que a nivel del mar la presión atmosférica es igual a una atmósfera atm

$$atm = 1.015 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 101.3 \text{ kPa}$$

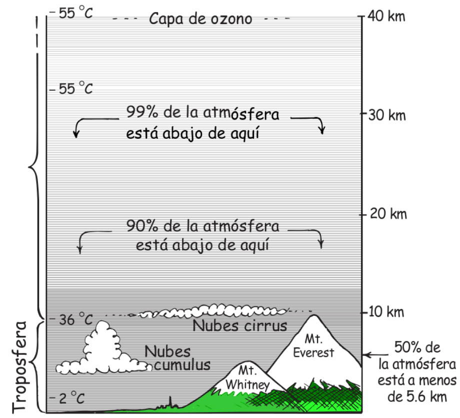


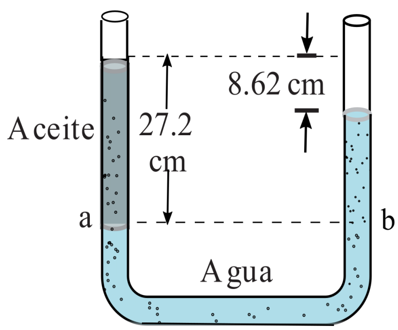
Figura 6.2: La atmósfera. El aire está más comprimido en el nivel del mar que a grandes alturas.

La presión absoluta es igual a la suma de la presión del fluido más la presión atmosférica

$$P_{abs} = P_{atm} + \rho g h \tag{6.4}$$

Ejemplo 6.2.3 Presión

Se vierten agua y luego aceite (los cuales no se mezclan) en un tubo en forma de U, abierto en ambos extremos. Alcanzan el equilibrio como se ilustra en la figura ¿Cuál es la densidad del aceite?



SOLUCIÓN

de la figura se observa que la altura de la columna de agua es igual a 18.58 cm además Las presiones en los punto a y b debidas a los dos fluidos deben ser iguales (de otra manera, el fluido conmayor presión empujará al fluido con menor presión). Por esta razón,

$$\text{Presión debida al aceite} = \text{Presión debida al agua}$$

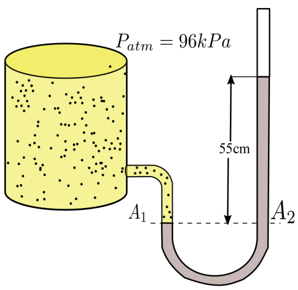
$$\rho_2 g h_2 = \rho_1 g h_1$$

$$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1$$

$$\rho_2 = \frac{18.58}{27.2}(1000\ \mathrm{kg/m^3}) = 638\ \mathrm{kg/m^3}$$

Ejemplo 6.2.4 Presión absoluta

Un manómetro se usa para medir la presión d un gas en un recipiente. El fluido que se emplea tiene una densidad $\rho_0 = \ 850\ \text{kg/m}^3$ y la altura de la columna del manómetro es de 55 cm, como se ilustra en la figura. Si la presión atmosférica local es de 96 kPa, determine la presión absoluta dentro del recipiente.



SOLUCIÓN

La presión del gas en el punto A_1 es igual a la presión del fluido en el punto A_2 más presión atmosférica

$$P_{tanque} = P_{atm} + \rho_0 g h$$

$$P_{tanque} = 96 \times 10^3\ \text{Pa} + (850\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(0.55\ \text{m}) = 106.6\ \text{kPa}$$

6.3. Viscosidad

Tanto el aire como el agua a pesar de fluir con facilidad, presentan cierto grado de dificultad al flujo. Cuando las moléculas de un fluido se desplazan, se presentan fuerzas internas que tienden a contrarrestar la fuerza que se aplica en el fluido para ponerlo en movimiento.

La viscosidad se puede definir como: la medida de la resistencia interna de un fluido a desplazarse o moverse. En los líquidos la viscosidad se debe a la fuerza de cohesión entre sus moléculas.
La viscosidad mide cuánta fuerza se requiere para deslizar una capa del fluido sobre otra, los fluidos tienden a seguir la ley de la gravedad, pero no todos se trasladan con la misma facilidad.

Si no fuera por la viscosidad, un líquido podría desplazarse a través de un tubo por su propia inercia sin que ninguna diferencia de presiones tuviera que empujarlo entre los extremos del conducto.

La unidad de medición de la viscosidad en el sistema internacional es el "poiseville", que se define como: "La viscosidad que tiene un fluido cuando su movimiento rectilíneo uniforme sobre una superficie plana es retardado por una fuerza de un newton por metro cuadrado de superficie de contacto con el fluido y la velocidad de éste, respecto a la superficie es de un metro por segundo".

De acuerdo a la definición anterior la unidad de viscosidad en el sistema internacional es el Ns/m^2, la cual recibe el nombre de Pascal·seg, y esta última recibe el nombre especial de poiseville

(PI).

Si un fluido en movimiento no tuviera viscosidad, podría pasar por un tubo horizontal sin que se le aplicara fuerza alguna. Pero debido a la viscosidad se requiere de la aplicación de una fuerza y por lo tanto de una diferencia de presiones en los extremos del tubo para que el fluido se mueva, es decir, para que haya flujo. El científico francés Jean Léonard Poiseville determinó las variables que intervienen en la rapidez de flujo laminar y continuo de un fluido, incomprensible dentro de un tubo cilíndrico.

Al valor de la viscosidad de un fluido se le llama coeficiente de viscosidad y depende de la temperatura. En los líquidos, el coeficiente de la viscosidad disminuye si la temperatura aumenta y en los gases aumenta al aumentar la temperatura.

El aceite de los automóviles tiene una viscosidad elevada. Esto es importante porque recubre las piezas móviles del motor e impide que la fricción los desgaste. En la industria la viscosidad se cuantifica en forma práctica, utilizando recipientes con una determinada capacidad, que tienen un orificio de un diámetro establecido convencionalmente. Al medir el tiempo que el líquido tarda en fluir se conoce su viscosidad, para ello se usan tablas que relacionan el tiempo de escurrimiento con la viscosidad.

6.4. Tensión superficial

Esta característica hace que la superficie libre de un líquido se comporte como una finísima membrana elástica. Un ejemplo de ello es cuando los mosquitos se paran en el agua sin hundirse, o cuando colocamos una aguja acostada en el agua.

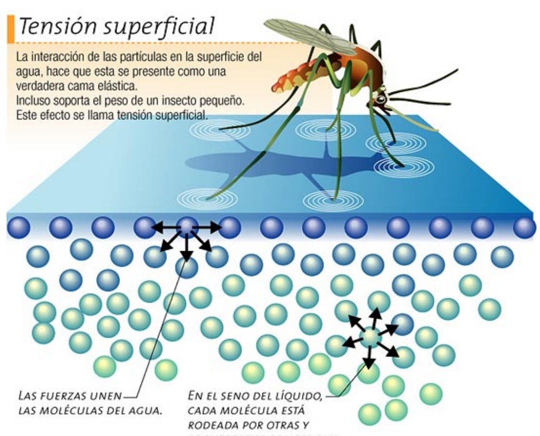


Figura 6.3: La tensión superficial permite sostener el peso de los insectos

Este fenómeno se presenta debido a la atracción entre las moléculas de un líquido. Cuando se coloca un líquido en un recipiente, las moléculas del interior del líquido se atraen entre sí en todas direcciones por fuerzas iguales que se contrarrestan unas con otras; pero las moléculas de la superficie del líquido sólo son atraídas por las moléculas que se encuentran por debajo de ellas y las laterales más cercanas, dando lugar a una fuerza dirigida hacia el interior del líquido. Por esta razón, la superficie de todos los líquidos posee una cierta rigidez llamada tensión superficial.

Puesto que todas las moléculas de la superficie de un líquido tienen una fuerza resultante que las jala hacia adentro, por naturaleza se acomodan de manera que tengan la mínima superficie expuesta. Se debe a este comportamiento el que las gotas de un líquido sean esféricas, ya que una esfera es el cuerpo geométrico que presenta la menor área superficial. Al cambiar la forma, la superficie se estira o bien, se halla en un estado de tensión, presentando cierta rigidez, de ahí el nombre de tensión superficial,

Por ejemplo, una gota de líquido sobre el cual no operan otras fuerzas adopta una forma esférica. Esto se observa en el caso de las gotas de agua que se acumulan en la carrocería de un automóvil recién encerado. Si observamos las gotas que caen de una llave, las vemos ligeramente alargadas, esto se debe a que la fuerza de gravedad las jala hacia abajo y las deforma. Sin este efecto, su forma sería esférica.

6.5. Capilaridad

Es una propiedad de los líquidos que depende de su tensión superficial (la cual a su vez, depende de la cohesión o fuerza intermolecular del líquido), que le confiere la capacidad de subir o bajar por un tubo capilar.

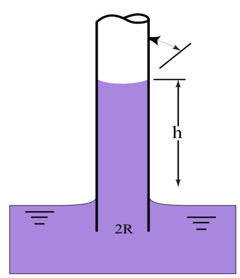


Figura 6.4: la tensión superficial hace que la interfaz de un fluido suba o baje en un tubo capilar

Un ejemplo es en los popotes, al momento de meter este en un recipiente que contiene algún líquido, el líquido se eleva un poco más arriba dentro del popote que en el recipiente, o cuando sumergimos la mitad de una playera en el agua, esta se va mojando más arriba del nivel en el cual le sumergimos. Cabe aclarar que entre más estrecho sea el tubo capilar mayor es la altura que alcanzara el líquido.

6.6. Cohesión

La cohesión es la fuerza de atracción que mantiene unidas a las moléculas de una misma sustancia. La atracción molecular entre moléculas semejantes de un líquido recibe el nombre de fuerza cohesiva. Ésta fuerza da origen a la cohesión, o sea, a la tendencia de un líquido a permanecer como un conjunto de partículas. La falta de fuerzas cohesivas entre las moléculas de un gas le permite llenar todo el recipiente donde se encuentre un gas encerrado.

La cohesión es mayor en los sólidos que en los líquidos y en éstos es mayor que en los gases. ¿Sabías que debido a la fuerza de cohesión, dos gotas de agua que se juntan se unen para formar una sola, y qué lo mismo sucede con dos gotas de mercurio?

Si observas por las mañanas las hojas de las plantas de un jardín, notarás que el agua del rocío se distribuye en pequeñas gotas y no de manera uniforme sobre la superficie de la hoja. Esto ocurre debido a que actúan fuerzas de atracción entre las moléculas de agua que no permiten que ésta se desparrame totalmente. Por ejemplo, las gotas que salen de una llave, tienden a adoptar una forma esférica propia, debido a las fuerzas de cohesión, pues cada molécula atrae en todas direcciones por igual a las moléculas que la rodean.

Pero sobre las moléculas de los líquidos no actúan solamente las fuerzas de cohesión; actúan, además, fuerzas de repulsión, que les impiden situarse demasiado cerca unas de otras y, también la gravedad actúa sobre ellas, obligando a las capas superiores del líquido a resbalar sobre las inferiores, hasta alcanzar el mismo nivel en la superficie.

.

6.7. Principio de Pascal

Probablemente has observado que un automóvil se detiene cuando el conductor presiona un pedal, o cómo una máquina retroexcavadora puede levantar gran cantidad de piedras y material, o cómo un gato hidráulica puede facilitar el cambio de un neumático desinflado. En realidad, lo más probable es que te estés preguntando cómo frena el automóvil, o cómo el gato o la retroexcavadora puede levantar grandes masas.

Todos estos casos utilizan sistemas hidráulicos para funcionar, los cuales tiene algún fluido dentro del sistema y que gracias a estos podemos transmitir una presión.

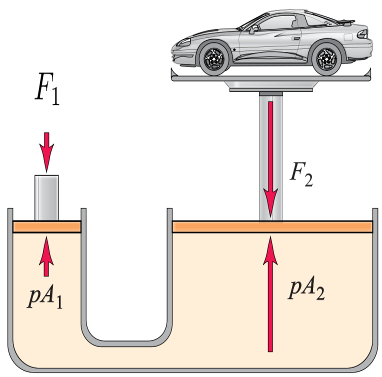
Principio de Pascal

El principio afirma que si se aplica una presión externa a un fluido confinado, la presión se transmitirá en todas las direcciones con la misma intensidad.

Ejemplo 6.7.1 Principio de Pascal

En un elevador de autos utilizado en una estación de servicio, el aire ejerce una fuerza sobre un pequeño pistón con área transversal de radio $r_1 = 5.00$ cm. Esta presión es transmitida por un líquido incompresible a un segundo pistón de radio $r_2 = 15.0$ cm. a) ¿Qué fuerza debe ejercer el aire comprimido sobre el pequeño pistón para poder levantar un automóvil que pesa 13 300 N? Desprecie el peso de los pistones.

SOLUCIÓN

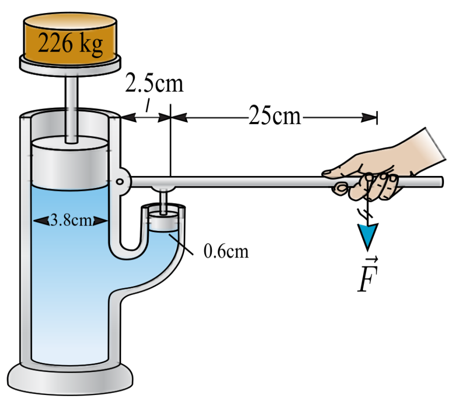


$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{F_2 A_1}{A_2} = F_2\left(\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^1}\right) \\ &= mg\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = (1350\text{ kg})(9\ 8\text{ m/s}^2)\left(\frac{5\text{ cm}}{15\text{ cm}}\right)^2 \\ &= 1415.5\text{ N} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.7.2 Principio de Pascal

El émbolo pequeño de la figura tiene un diámetro de 0.6 cm ; el émbolo grande tiene un diámetro de 3.8 cm. En ausencia de fricción, determine la fuerza F para sostiene un masa 226 kg



SOLUCIÓN

La fuerza en el embolo un es iguala al peso de la masa $F_2 = (226\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 2214.8$ N después aplicamos el principio de Pascal para encontrar la fuerza sobre el embolo pistón pequeño

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$
$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) F_2$$
$$F_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 F_2 = \left(\frac{0.3\text{ cm}}{1.9\text{ cm}}\right)^2 (2214.8\text{ N}) = 55.21\text{ N}$$

Esta es la fuerza que actúa sobre el émbolo pequeño, ahora para encontrar la fuerza F aplicaremos el hecho que $\Sigma\tau = 0$ alrededor del centro del cilindro de menor tamaño donde d=25 cm y d_1=2.5cm

$$F \perp d - F_1 \perp d_1 = 0$$

$$F \perp d = F_1 \perp d_1$$

$$F = \frac{d_1}{d} F_1 = \left(\frac{2.5\ \text{cm}}{25\ \text{cm}} \right) 55.21\ \text{N} = 5.5\ \text{N}$$

6.8. Principio de Arquímedes

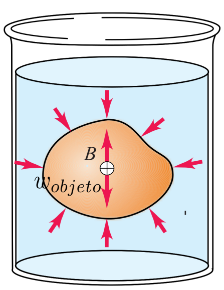
Cuando se sumerge un cuerpo en un líquido parece que pesara menos. Lo podemos sentir cuando nos sumergimos en una piscina, o cuando tomamos algo por debajo del agua, los objetos parecieran que pesan menos.

Esto es debido a que, todo cuerpo sumergido recibe una fuerza de abajo hacia arriba.

Cuando en un vaso lleno de agua sumergimos un objeto, podemos ver que el nivel del líquido sube y se derrama cierta cantidad de líquido. Se puede decir que un cuerpo que flota desplaza parte del agua. Este empuje que reciben los cuerpos al ser introducidos en un líquido fue estudiado por el griego Arquímedes

Principio de Arquímedes

Todo Cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional o de empuje igual al peso del fluido desplazado



Las flechas indican las fuerzas sobre el objeto debido a la presión, mayores en la parte inferior porque la presión aumenta con la profundidad. La fuerza de empuje causada por el fluido circundante es la misma sobre cualquier punto del objeto,

Figura 6.5: Principio de arquimedes

Para determinar la fuerza de flotación usaremos la la siguiente figura

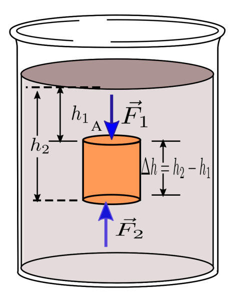


Figura 6.6: Determinación de la fuerza de flotación.

En la parte superior del cilindro existe una fuerza de flotación

$$F_1 = P_1 A_= \rho_F h_1 g A \tag{6.5}$$

$$F_2 = P_2 A_= \rho_F h_2 g A \tag{6.6}$$

Igualaremos las ecuaciones 6.7 y 6.6 y obtenemos

$$\begin{aligned} F_B = F_2 - F_1 &= \rho_F g A (h_2 - h_1) \\ &= \rho_F g A \Delta h \\ &= \rho_F g V \end{aligned}$$

$$\boxed{F_B = m_f g = \rho_f g V_f} \tag{6.7}$$

donde: F_B = Fuerza de Flotación
m_f = masa del fluido desplazado
ρ = densidad del fluido
V_f = volumen del fluido

la flotabilidad de un objeto esta relacionado con la densidad del mismo con respecto al fluido donde se encuentra. por ejemplo decimos que un globo flota, en el aire cuando lo apropiado sería expresar que es menos denso que el aire a su alrededor

Un objeto flotará en un fluido si la densidad promedio del objeto es menor que la densidad del fluido. Si la densidad promedio del objeto es mayor que la densidad del fluido, el objeto se hundirá

a) Un objeto flota en un fluido, si su densidad promedio es menor que la del fluido $\rho_o < \rho_f$

b) Un objeto se hunde en un fluido, si su densidad promedio es mayor que la densidad del fluido $\rho_o > \rho_f$

c) Un objeto está en equilibrio a cualquier profundidad sumergida en un fluido, si su densidad promedio es igual a la densidad del fluido $\rho_o = \rho_f$

6.8.1. Objetos totalmente sumergidos

La fuerza de flotación sobre un objeto de volumen V totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_f es $F_B = \rho_f V g$ y el peso del objeto es $w = \rho_o V g$, donde ρ_o es la densidad del objeto. Así el $F_B - w$ sera igual a $F_B - w = \rho_f V g - \rho_o V g$ factorizando Vg obtenemos

$$\boxed{F_B - w = V g(\rho_f - \rho_o)} \tag{6.8}$$

De esta manera observamos que si la densidad del objeto $\rho_0 < \rho_o$ el objeto presentara una aceleración ascendente pero si $\rho_0 > \rho_o$ el objeto se hundirá ya que presenta una aceleración negativa

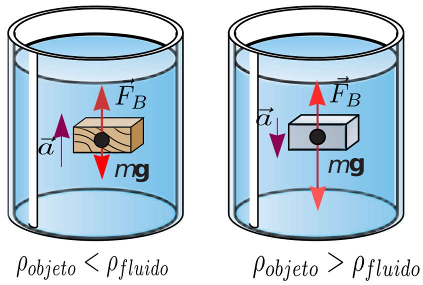


Figura 6.7: Un objeto totalmente sumergido con menor densidad que el fluido que lo contiene experimenta una fuerza neta ascendente. Un objeto totalmente sumergido con densidad mayor que el fluido se hunde.

En la la figura 6.7 dos objetos poseen diferentes densidades e ilustra lo este hecho

6.8.2. Objetos parcialmente sumergidos

Para objetos parcialmente sumergidos la fuerza de flotación es igual peso del objeto de esta manera$F_B = \rho_f V g$ se equipara al peso del objeto $w = \rho_o V g$

$$\rho_o V g = \rho_f V g$$

$$\boxed{\frac{\rho_o}{\rho_f} = \frac{V_f}{V_o}} \tag{6.9}$$

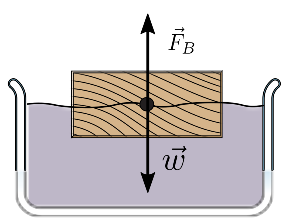


Figura 6.8: En un objeto que flota las fuerza de flotación F_B y el peso están en equilibrio $\vec{F}_B = \vec{w}$

6.8.3. Peso aparente de un objeto en un fluido

Si colocamos un objeto en una balanza que está calibrada para medir el peso, entonces la la lectura en la báscula es el peso del objeto . Sin embargo, si hacemos esto bajo el agua, la fuerza de flotación hacia arriba sobre el objeto desde el agua disminuye la lectura. Esa lectura es entonces un peso aparente. En general, un peso aparente está relacionado al peso real de un cuerpo y la fuerza de flotación sobre el cuerpo por

$$\text{Peso aparente} = \text{Peso real} - \text{Fuerza de flotación}$$

$$\boxed{w' = w - F_B} \tag{6.10}$$

Ejemplo 6.8.1 Principio de Arquímedes-Peso Aparente

Un cubo de metal de 2.00 cm por lado tiene una densidad de 6600 kg/m^3 . Calcule su masa aparente cuando está totalmente sumergido en agua.

SOLUCIÓN

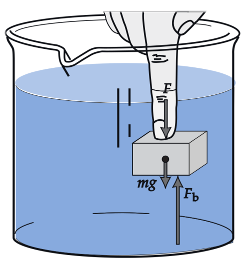
Debemos hacer está consideración un objeto no pierde masa solo aparente otra por estar sumergido así que la fuerza de flotación usaremos el hecho que $w' = w - F_B$
$F_B = \rho_{agua} gV$ el volumen es igual al $V = (0.02\text{ m})^3 = 8 \times 10^{-6}\text{ m}^3$

$$w' = w - F_B$$
$$m'g = `\rho_{madera} gV - \rho_{agua} gV$$
$$m'g = gV(\rho_{madera} - \rho_{agua})$$
$$m' = V(\rho_{madera} - \rho_{agua})$$

$$m' = (8 \times 10^{-6}\text{ m}^3)\left(6600\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 0.0448\text{ kg} = 4.48\text{ gr}$$

Ejemplo 6.8.2 Principio de Arquímedes

Un cubo sólido de madera de 3.0 cm de lado se puede sumergir completamente en agua cuando se le aplica una fuerza descendente de 0.054 N. ¿Cuál es la densidad de la madera?



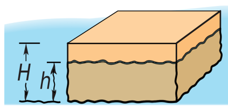
SOLUCIÓN

evaluamos el volumen $V = (0.3\text{ m})^3 = 27 \times 10^{-6}\text{ m}^3$ la fuerza de flotación es igual peso de agua desplazado $\vec{F}_B = \rho_{agua} gV$ y F es la fuerza con la que se empuja y w igual al peso aparente en el igual $w = \rho gV$

$$F_B - F - w = 0$$
$$\rho_{agua} gV - F - \rho_{madera} gV = 0$$
$$gV(\rho_{agua} - \rho_{madera}) = F$$
$$\rho_{agua} - \rho_{madera} = \frac{F}{gV}$$
$$\rho_{madera} = \rho_{agua} - \frac{F}{gV}$$
$$\rho_{madera} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} - \frac{0.054\text{ N}}{(9.8\text{ m/s}^2)(27 \times 10^{-6}\text{ m}^3)} = 795.91\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ejemplo 6.8.3 Objeto parcialmente sumergido

En la figura se muestra un bloque parcialmente sumergido con $\rho_o = 800$ kg/m^3 que flota en un fluido con densidad $\rho_f = 1200$ kg/m^3 el bloque tiene una altura H= 6cm que altura h sobresale del fluido



SOLUCIÓN

El cuerpo esta en equilibro así que la fuerza de flotación F_B es igual al peso w

$$F_B = \rho_f g V_f \quad (a)$$

$$w = \rho_o g V_o \quad (b)$$

El volumen del fluido es igual al área de la cara inferior multiplicada por la altura h $V_f = Ah$ y el volumen del objeto es del objeto $V_o = AH$ estos valores los sustituimos en las ecuaciones (a) y (b)

$$\rho_f g A h = \rho_o g A H_o$$

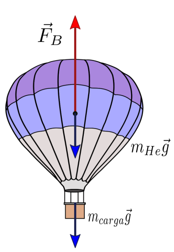
$$h = \frac{\rho_o g A H_o}{\rho_f g A}$$

$$h = \frac{\rho_o}{\rho_f} H$$

$$h = \left(\frac{800 \text{ kg/m}^3}{1200 \text{ kg/m}^3}\right) 6 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Ejemplo 6.8.4 Principio de Arquímedes

¿Qué volumen V de helio se necesita para que un globo levante una carga de 180 kg (incluido el peso del globo vacío)?



SOLUCIÓN

La fuerza de flotación F_B sobre el globo debes ser igual o mayor que el peso del globo incluido el helio

$$F_B = (m_{He} + m_{carga})g$$

usaremos los valores de la tabla 6.1 para las densidades del He y el aire así como la ecuación 6.7

$$\rho_{aire} g V = (\rho_{He} V + m_{carga}) g$$

$$\rho_{aire} g V - \rho_{He} g V = m_{carga} g$$

$$V g(\rho_{aire} - \rho_{He}) = m_{carga} g$$

$$V = \frac{m_{carga}}{\rho_{aire} - \rho_{He}}$$

$$V = \frac{180 \text{ kg}}{(1.29 \text{ kg/m}^3 - 0.179 \text{ kg/m}^3)} = 160 \text{ m}^3$$

6.9. Dinámica de Fluidos

El estudio de los fluidos reales en movimiento representa un verdadero reto científico y la frontera de la ciencia actual. Por lo que se expondrán los resultado de fluidos muy idealizado conocido como **laminar** . Esto fluido presenta la siguientes características:

1) EL flujo es constante implica que todas las partículas de un fluido tienen la misma velocidad al pasar por un punto dado.

2) El flujo es irrotacional significa que un elemento de fluido (un volumen pequeño del fluido) no posee una velocidad angular neta; esto elimina la posibilidad de remolinos. (El flujo no es turbulento.)

3) El fluido es no viscoso; es decir, no hay fuerza de fricción interna entre capas adyacentes.

4) El es flujo es incompresible significa que la densidad del fluido es constante.

6.10. Ecuación de continuidad

Cuando colocamos alguno de nuestros dedos obstruyendo parcialmente la salida de una manguera que lleva agua, podemos notar que esta sale con mayor velocidad y el chorro de agua llega más lejos. ¿A qué se debe esto?

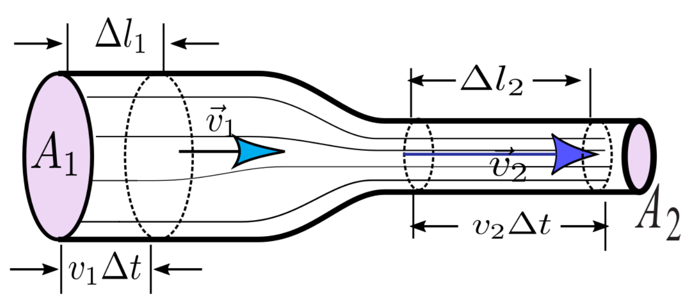


Figura 6.9: Flujo de un fluido a través de un tuberia de diametro variable

Cuando un fluido pasa por un conducto (tubo) como en la **figura 6.9** ,la masa de fluido que sale en un tubo en un tiempo dado debe ser igual a la masa que entra en el tubo durante un tiempo corto

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 \Delta l_1 = \rho A_1 v_1 t$$

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2 = \rho_2 A_2 \Delta l_2 = \rho A_2 v_2 t$$

puesto que $\Delta m_1 = \Delta m_2$ se dice qeue:

$$\rho_1 A_1 v_1 t = \rho_2 A_2 v_2 t$$

Si un fluido es incompresible, su densidad ρ es constante, así que

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \tag{6.11}$$

Esta expresión matemática 6.11 recibe el nombre de ecuación de continuidad y representa una expresión de la ley de conservación de la masa, pues como los volúmenes de entrada y salida son iguales, las masas del fluido también deben ser los mismos. Al analizar esta ecuación podemos deducir que:

Cualquier fluido irá más rápido donde el área de la sección transversal del tubo sea más angosta y que el fluido irá más lento donde el área de la sección transversal sea mayor.

Debido a esto podemos comprender por qué el agua fluye más rápido cuando ponemos un dedo que obstruye la salida de agua en la manguera

Si no hay pérdidas de fluido dentro de un tubo uniforme, la masa de fluido que entra en un tubo en un tiempo dado debe ser igual a la masa que sale del tubo en el mismo tiempo

6.10.1. Gasto

La ecuación 6.11 nos sirve para entidad conocida como gasto o caudal, el gasto es (volumen por unidad de tiempo)

donde A es el área de la sección transversal del tubo. Las unidades de Q en el SI son $\mathrm{m^3/s}$

$$Q = Av \tag{6.12}$$

Ejemplo 6.10.1 Gasto o Caudal

A través de un tubo de 4.0 cm d.i. fluye aceite a una rapidez promedio de 2.5 m/s. Encuentre el flujo en

SOLUCIÓN

Usaremos la ecuación 6.12

$$Q = Av$$

$$Q = \pi r^2 v = \pi(0\,02 \text{ m})^2(2\,5 \text{ m/s}) = 3.14 \text{ m}^3/\text{s}$$

Ejemplo 6.10.2 Caudal-Ecuación de continuidad

La rapidez de la glicerina que fluye en un tubo de 5.0 cm de d.i. es de 0.54 m/s. Encuentre la rapidez del fluido en un tubo de 3.0 cm de d.i. que se une a él. El fluido llena ambos tubos.

SOLUCIÓN

El caudal es el mismo para ambas seccione del tubo, así que Utilizaremos la ecuación de continuidad 6.11

$$A_2 v_2 = A_1 v_1$$

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

$$v_2 = \left(\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}\right) v_1$$

$$v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1$$

$$v_2 = \left(\frac{2.5 \text{ cm}}{1.5 \text{ cm}}\right)^2 (0.54 \text{ m/s}) = 1.5 \text{ m/s}$$

6.11. Ecuación de Bernoulli

De la ecuación de continuidad se deduce, que si el fluido es incompresible existirán cambios de rapidez para secciones de diferentes tamaños dentro de una tubería. También es evidente que para secciones de diferente grosor las presiones deben variar. Para medir estos cambios utilizamos una herramienta llamada Teorema de Bernoulli. Este enunciado predice que cambios de velocidad en una tubería provocará cambios de presión.

Para deducir el Teorema de Bernoulli aplicaremos el teorema del trabajo y la energía, hemos de considerar que la energía dentro del fluido solo experimenta transformaciones debidas a la posición y a la rapidez de las moléculas, las cuales se movieran de líneas de trayectoria rectilínea , en un flujo laminar, y sin viscosidad.

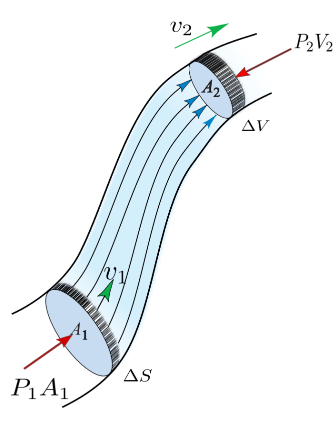


Figura 6.10: Tubo de flujo de sección transversal cambiante

$$\Delta W = \Delta PV = V(P_2 - P_1)$$

Para el cambio de energía cinética

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_2^2)$$

ahora calculamos el cambio neto de la energía potencial gravitacional

$$\Delta U_g = mg(h_2 - h_2) = \rho V(h_2 - h_2)$$

La suma de los cambios en las energías potencial y cinética es igual al trabajo neto realizado $\Delta W = \Delta E_k + \Delta U_g$

$$V(P_2 - P_1) = \frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2) + \rho V(h_2 - h_1)$$

Se divide ambas expresiones por el volumen

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho(h_2 - h_1)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho h_2 - \rho h_1$$

La ecuación de Bernoulli, y dice que el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo.

$$\boxed{P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1} \tag{6.13}$$

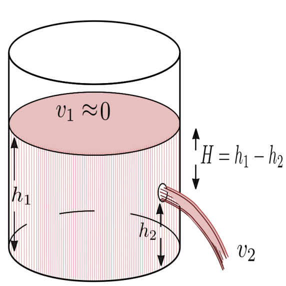
La ecuación de Bernoulli dice que el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo.

Algunas veces la ecuación de Bernoulli se escribe como

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte$$

Ejemplo 6.11.1 Teorema de Torrichelli

Se perfora un pequeño agujero en el costado de un tanque cilíndrico que contiene agua,por debajo del nivel de agua, y ésta sale por él . Calcule la tasa inicial aproximada de flujo de agua por el agujero del tanque.



SOLUCIÓN

Para resolver el ejercicio se debe considerar que tanto la salida del liquido como la parte superior están a la misma presión atmosférica y haremos $H = (h_1 - h_2)$ y la velocidad el líquido en la parte más alta igual a cero $v_1 = 0$

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \rho g h_1$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = +\rho g h_1$$

$$v_2^2 = 2(gh_1 - gh_2)$$
$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$
$$v_2 = \sqrt{2gH}$$

Este resultado se llama teorema de Torricelli. Aunque se reconoce como un caso especial de la ecuación de Bernoulli, Evangelista Torricelli, lo descubrió un siglo antes que Bernoulli.

Ejemplo 6.11.2 Ecuación de Bernoulli

A través de un tubo horizontal de sección transversal variable se establece un flujo de agua estacionario. En un lugar la presión es de 130 kPa y la velocidad es de 0.60 m/s. Determine la presión en otro punto del mismo tubo donde la rapidez es de 9.0 m/s.

SOLUCIÓN

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_1 - \rho g h_2$$

sabemos que la diferencia de altura $h_2 - h_1 = 0$ porque ambos puntos se encuentran a al misma altura

$$P_2 = P_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) + \rho g\cancel{(h_1 - h_2)}$$

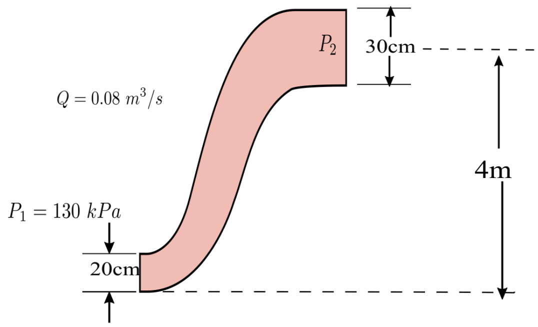
$$P_2 = P_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2)$$

$$P_2 = 130 \times 10^3 \text{ Pa} + \frac{1000 \text{ kg/m}^3}{2}[(0.6 \text{ m/s})^2 - (9 \text{ m/s})^2] = 89.63 \times 10^3 \text{ Pa} = 89.6 \text{ kPa}$$

Ejemplo 6.11.3 Ecuación de Bernoulli

Un tubo de diámetro interno variable transporta agua. En el punto 1 el diámetro es de 20 cm y la presión de 130 kPa. En el punto 2, que está 4.0 m más arriba que el punto 1, el diámetro es de 30 cm. Si el flujo es de 0.080 m^3/s,¿cuál es la presión en el segundo punto?.

SOLUCIÓN



Atenderemos primero a encontrar las velocidades considerando, que los flujos másicos en ambos extremos son iguales $Q = Av$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{(0.08\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s})}{\pi(0.1\ \mathrm{m})} = 2.54\ \mathrm{m/s}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_2} = \frac{(0.08\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s})}{\pi(0.15\ \mathrm{m})} = 1.13\ \mathrm{m/s}$$

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$

despejamos la presión 2

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_1 - \rho g h_2$$

$$P_2 = P_1 + \rho\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - g(h_2 - h_1)\right]$$

$$P_2 = 130 \times 10^3\ \mathrm{Pa} + 1000\ \mathrm{kg/m^3}\left[\frac{(2.54\ \mathrm{m/s})^2 - (1.13\ \mathrm{m/s})^2}{2} - 9.8\ \mathrm{m/s^2}(4\ \mathrm{m})\right] = 93.38 \times 10^3\ \mathrm{Pa} = 93\,\mathrm{kPa}$$

6.12. Tubo Venturi y efecto Venturi

Cuando se analiza las ecuaciones de movimiento para un fluido nos encontramos que al estrecharse un conducto la velocidad aumenta de esta manera se preserva la igualdad Av, la ecuación de Bernoulli nos dice que si la velocidad aumenta la presión debe disminuir ya que $P + \frac{1}{2}\rho v^2$ debe mantenerse constante, Esto se puede expresar a través del enunciado Venturi

Efecto Venturi

Cuando un fluido pasa a través de un estrechamiento aumenta la velocidad del fluido y disminuye la presión

6.12.1. El tubo de Venturi

Se utiliza para medir la velocidad de un fluido incompresible. Consiste en un tubo con un estrechamiento, de modo que las secciones antes y después del estrechamiento son A_1 y A_2, con $A_1 > A_2$. En cada parte del tubo hay un manómetro, de modo que se pueden medir las presiones respectivas P_1 y P_2.

Calculo de velocidad en un tubo Venturi

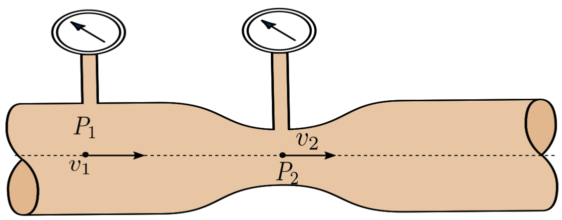


Figura 6.11: Flujo en un tubo Venturi

En la figura 6.11 observamos que $h_1 = h_2$ de esta manera podemos simplificar la ecuación.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

simplificando nos queda

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

otra consideración es la referente a al relación de velocidades. De la ecuación de continuidad $v_1 A_1 = v_2 A_2$ con esto podemos dejar a v_2 en función de v_1 y tomar la forma $v_2 = (A_1/A_2)v_1$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1}{A_2}v_1\right)^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] = (P_1 - P_2)$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left[(A_1/A_2)^2 - 1\right]}}} \tag{6.14}$$

Aplicaciones del efecto Venturi

- Hidráulica: la depresión generada en lunes equipamiento al aumentar la velocidad del fluido, se utiliza frecuentemente para la fabricación de máquinas que proporcionan aditivos en una conducción hidráulica. Es muy frecuente la utilización de este efecto Venturi en los mezcladores del tipo Z para añadir un espumógeno en la conducción de agua para la extinción.

- Aeronáutica: aunque el efecto Venturi se utiliza frecuentemente para explicar cualitativamente el ascenso del ala de un avión, el efecto Venturi por sí solo no es suficiente para explicar dicho fenómeno. En este sustento intervienen además del principio de Bernoulli en virtud del cual el aire adquiere mayor velocidad al pasar por la región más convexa de una ala de avión

- Cardiología: el efecto Venturi se utiliza para explicar la regurgitación mitral que se puede dar en la miocardiopatía hipertrófica, y que es causa de muerte súbita en deportistas. La explicación es que el movimiento sistólico anterior (MSA) que realiza la válvula anterior a la válvula mitral, se produce porque la hipertrofia septal y el estrechamiento del tracto de salida provocan una corriente de alta velocidad sobre la válvula mitral, que debido al efecto Venturi, succiona el extremo de la válvula anterior contra el septo el cual impide la salida de sangre, por lo que regurgita hacia la aurícula izquierda.

Fluidos estáticos y en movimiento

Densidad

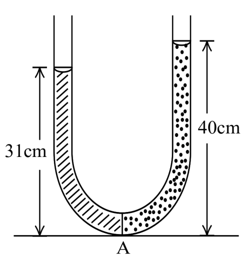
1. ¿Qué volumen ocupan 0.4 kg de alcohol? ¿Cuál es el peso de este volumen? $\rho = 0.79$ kg/m^3
   Resp. 5.06×10^{-4} m^3,3.92 N

2. ¿Cuál es la masa aproximada del aire en una habitación de 5.6 x 3.8x 2.8 m? $\rho_{aire} = 1.29$ kg/m^3
   Resp. 76.86 kg

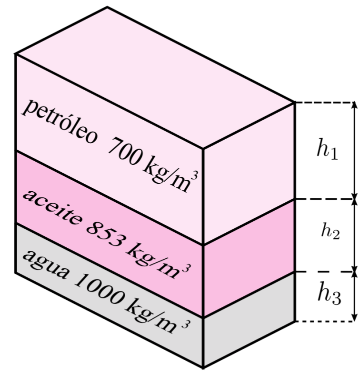
Presión

3. Halle la presión en kilopascales producida por una columna de mercurio de 60 cm de alto $\rho_{Hg} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3.
   Resp. 80 kPa

4. Como se muestra en la una columna de agua de 40 cm de altura sostiene otra columna de 31 cm de un fluido desconocido. ¿Cuál es la densidad del fluido que no se conoce?
   Resp. $\rho = 1.3 \times 10^3$ kg/m^3

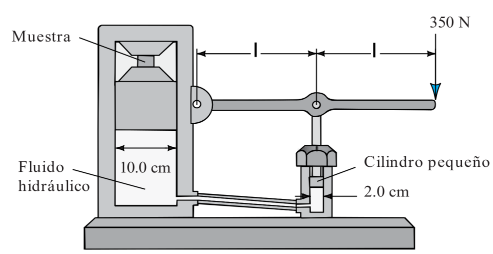


5. Se ha vaciado petróleo sin refinar dentro de un barco tanque, después del vaciado los fluidos se asienta y forma tres capaz bien definidas como se muestra en la figura , encuentra la presión en el fondo del tanque si $h_1 = 8$ m, $h_2 = 5$ m y $h_3 = 5$ m
   Resp. 4.03×10^5 Pa $P_{abs} = 5.03 \times 10^5$ Pa



Principio de Pascal

6. Una prensa hidráulica para compactar muestras de polvo tiene un cilindro grande de 10.0 cm de diámetro y un cilindro pequeño con diámetro de 2.0 cm . Se adapta una palanca al cilindro pequeño, como se indica. La muestra, que se coloca en el cilindro grande, tiene una área de 4.0 cm^2 . ¿Cuál es la presión sobre la muestra si se aplican 350 N a la palanca?



7. El tubo de entrada que suministra presión de aire para operar un gato hidráulico tiene 2 cm de diámetro. El pistón de salida es de 32 cm de diámetro. ¿Qué presión de aire (presión manométrica) se tendrá que usar para levantar un automóvil de 1800 kg?
   Resp. 219 kPa

Principio de Arquímedes

8. Una muestra de mineral pesa 17.50 N en el aire, pero, si se cuelga de un hilo ligero y se sumerge por completo en agua, la tensión en el hilo es de 11.20 N. Calcule el volumen

total y la densidad de la muestra.
Resp. 6.43×10^{-4} m^3 , 2.78×10^3 kg/m^3

9. Un cubo de 100 g que mide 2 cm por lado se ata al extremo de una cuerda y se sumerge totalmente en agua. ¿Cuál es el empuje y cuál es la tensión en la cuerda?
Resp.0.0784 N, 0.902 N

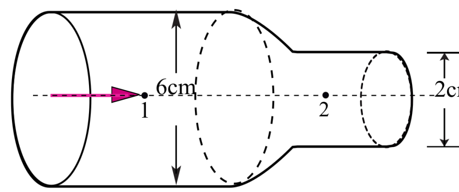
10. La masa total de un globo y su góndola (vacía) es de 200 kg. Cuando el globo está lleno, contiene 900 m^3 de helio con una densidad de 0.183 kg/m^3 . Calcule la carga extra, además de su propio peso, que puede levantar el globo. La densidad del aire es de 1.29 kg/m^3 .
Resp. 796 kg

11. ¿Cuál es la velocidad de salida del agua a través de una grieta del recipiente localizada 6 m por debajo de la superficie del agua? Si el área de la grieta es 1.3 cm^2, ¿con qué gasto sale el agua del recipiente?
Resp. 10.8 m/s , 1.41×10^{-3} m^3/s

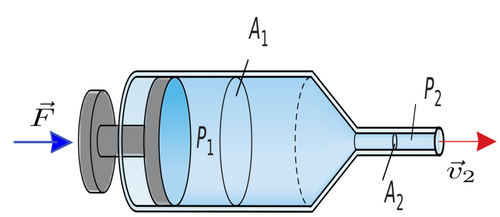
Ecuación de Bernoulli

12. Si un viento sopla a 35 m/s sobre una casa . ¿Cuál es la fuerza neta sobre el techo si su área es de 240 m^2 y es plano ?
Resp. 1.9×10^5 N

13. Un tubo horizontal tiene la forma que se presenta en la fi gura En el punto 1 el diámetro es de 6.0 cm, mientras que en el punto 2 es sólo de 2.0 cm. En el punto 1, y 1 $v_1 = 2.0$ m/s y $P_1 = 180$ kPa. Calcule y v_2 y P_2
Resp. $v_2 = 18$ m/s, $P_2 = 20$ kPa



14. Una jeringa hipodérmica contiene un medicamen- to con una densidad igual a la del agua . El barril de la jeringa tiene un área de sección transversal de 2.50×10^{-5} m^2 . En ausencia de una fuerza sobre el émbolo, la presión en todas partes es de 1.00 atm. Una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 2.00 N se ejerce sobre el émbolo, lo que hace que el medicamento salga por la aguja. Determine la rapidez de flujo del medicamento por la aguja. Suponga que la presión en la aguja permanece a 1.00 atm y la jeringa está horizontal.
Resp. 12.6 m/s



Referencias

Beuche, F. (2007). *Física general* (10.ª ed.). México: McGraw-Hill.

Giancoli, D. (2008). *Física principios con aplicaciones* (6.ª ed., Vol. 1). México: Pearson.

Hewitt, G., Paul. (2016). *Física conceptual* (12.ª ed.). México: Pearson.

Resnick, y Halliday. (2018). *Fundamentos de física* (8.ª ed., Vol. 1). México: Patria.

Sears, y Zemansky. (2017). *Física universitaria* (12.ª ed., Vol. 1). México: Pearson.

Serway, R. (2017). *Fundamentos de física* (9.ª ed., Vol. 1). México: Pearson.

Tipler, P., y Mosca, G. (2015). *Física para la ciencia y la tecnología* (6.ª ed., Vol. 1). España: Reverte.

Tippens, E., Paul. (2011). *Física conceptos y aplicaciones* (7.ª ed.). México: McGraw-Hill.

Wilson, y Buffa. (2007). *Física* (6.ª ed.). México: Pearson.

Índice alfabético